Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 11, стр. 534 – 536 *5 июня 1983 г.*

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНОЙ

В.В.Арсенин

Найден класс аксиально-симметричных открытых конфигураций, в которых возможна устойчивость длинной тонкой плазмы с $\beta \ll 1$.

1. Рассматривается МГД устойчивость плазмы низкого давления ($\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1, B$ – магнитное поле) в конфигурациях, в которых плазма находится около произвольной (но достаточно гладкой) поверхности вращения, рис. 1. Вдоль поля может быть несколько магнитных пробок, так что давление переменно по длине. На рисунке плазма с $p \neq 0$ занимает области *1* и *2* , на соединительном участке *3* давление пренебрежимо мало (но проводимость, как и в *1, 2*, велика). Считается, что пробочные отношения лишь немного больше единицы, так что $p_\perp \gg p_\parallel$. Для сокращения записи давление электронов полагается много меньше ионного.

2. При $\beta \to 0$ наиболее опасные желобковые колебания потенциальны: $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, Φ постоянно вдоль магнитной силовой линии. Критерий устойчивости имеет вид [1–3]

$$W = \int \Phi^2 d\psi \int \left\{ - \frac{\partial(p_\perp + p_\parallel)}{\partial\psi} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial\psi} + (p_\perp + p_\parallel)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\psi}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + m_i \int \frac{B}{v_\parallel} \frac{\partial F}{\partial\epsilon} \left[\mu^2 \left(\frac{\partial B}{\partial\psi}\right)^2 - \left(\frac{\int \frac{v_\parallel^2 + \mu B}{v_\parallel} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial\psi} dl}{\int \frac{dl}{v_\parallel}} \right)^2 \right] d\mu d\epsilon \right\} \frac{dl}{B} > 0. \tag{1}$$

Здесь $F(\epsilon, \mu, \psi)$ – невозмущенная функция распределения ионов, зависящая от $\epsilon = v^2/2$, $\mu = v_\perp^2/2B$ и магнитного потока ψ; $v_\parallel = \sqrt{2(\epsilon - \mu B)}$, $B, p_\perp$ и $p_\parallel$ – функции двух координат: ψ и „продольной" координаты λ, поверхности уровня которой перпендикулярны поверхностям $\psi = \mathrm{const}$. Интегрирование по dl ведется вдоль силовой линии, выражение для элемента dl через ψ и λ будет дано позже.

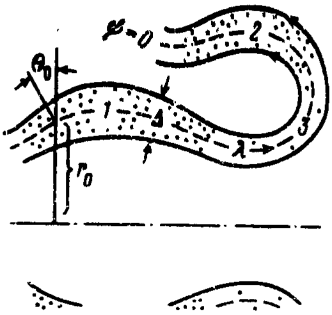

Рис. 1

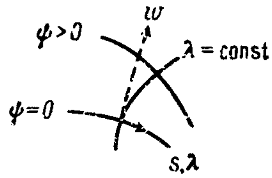

Рис. 2

Ограничимся случаем, когда относительное изменение $\partial B/\partial\psi$ на длине отдельной ловушки $\lesssim p_\parallel/p_\perp$. При этом слагаемое с $\partial F/\partial\epsilon$ упрощается: члены с μ^2 „почти" взаимно уничтожаются (сумма $< p_\parallel\,[(1/B)(\partial B/\partial\psi)]^2$), а остающийся старший, линейный по μ член сводится к $2p_\perp[(1/B)(\partial B/\partial\psi)]^2$, так что

$$W = \int \Phi^2 d\psi \int \left[-\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{p_\perp + p_\parallel}{B^2}\right)\frac{\partial B}{\partial\psi} + \frac{p_\perp - p_\parallel}{B^3}\left(\frac{\partial B}{\partial\psi}\right)^2\right] dl. \qquad (2)$$

Отсюда получаем достаточное условие устойчивости

$$\int \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{p_\perp + p_\parallel}{B^2}\right)\frac{\partial B}{\partial\psi}\, dl < 0. \qquad (3)$$

3. Полагая заданным поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ на магнитной поверхности $\psi = 0$, вдоль которой будем отсчитывать λ, найдем $B(\psi, \lambda)$ около нее. Удобно временно перейти к другим ортогональным координатам: w, отсчитываемой в меридиональном сечении по нормали к кривой $\psi = 0$, s-координете основания нормали (рис. 2) и азимутальному углу φ. В этих координатах поток $\psi = rA_\varphi$ ($\mathrm{rot} A_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{B}$) представляется рядом [4]

$$\psi = r_0 B_0 w - \frac{r_0 B_0}{2}\left(k_0 - \frac{1}{r_0}\cos\theta_0\right) w^2 + \left\{ \frac{r_0 B_0}{3}\left(k_0^2 - \frac{k_0}{r_0}\cos\theta_0\right) - \frac{r_0}{6}\left[\frac{1}{r_0}(r_0 B_0)'\right]' \right\} w^3 + \dots, \qquad (4)$$

где $r_0(s)$ – расстояние от кривой $\psi = 0$ до оси, $k_0(s) = R_0^{-1}(s)$ – ее кривизна, $\theta_0(s)$ – угол между вектором $\mathbf{w}$ и радиальным направлением (рис. 1), штрих означает дифференцирование по s. Вычислив компоненты поля B_w и B_s, находим

$$B = B_0 - k_0 B_0 w + \left\{ k_0^2 - \frac{1}{2B_0}\left[\frac{1}{r_0}(r_0 B_0)'\right]' + \frac{1}{2}\frac{[(r_0 B_0)']^2}{r_0^2 B_0^2} \right\} B_0 w^2 + \dots . \qquad (5)$$

Для перехода к координатам ψ, λ выразим из (4) w через ψ: $w = \dfrac{\psi}{r_0 B_0} + \dfrac{1}{2}\left(k_0 - \dfrac{1}{r_0}\cos\theta_0\right) \times$ $\times\ (\psi/r_0 B_0)^2 + \dots$ и используем разложение $\lambda = s - \dfrac{1}{2}\dfrac{(r_0 B_0)'}{r_0 B_0} w^2 + \dots$ (следует из условия $\nabla\psi\nabla\lambda = 0$), откуда найдем $s(\lambda, \psi)$. В результате получаем

$$B = B_0 - k_0 B_0 \frac{\psi}{r_0 B_0} + \frac{1}{2}\left\{ k_0^2 + \frac{k_0}{r_0}\cos\theta_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{B_0'}{B_0}\frac{(r_0 B_0)'}{r_0 B_0} - \frac{1}{B_0}\left[\frac{1}{r_0}(r_0 B_0)'\right]' + \frac{[(r_0 B_0)']^2}{r_0^2 B_0^2} \right\} B_0 \left(\frac{\psi}{r_0 B_0}\right)^2 + \dots, \qquad (6)$$

где теперь B_0, r_0, k_0, θ_0 – функции λ.

4. Случай $k_0 = 0$ отвечает ловушке Андреолетти – Фюрта [5,6], где может быть неглубокий $\min B$. Слабое (поскольку рассматривался случай, когда плазма занимает область около точки, где $k_0 = 0$) влияние конечной k_0 на неустойчивость такой ловушки обсуждалось в [6].

5. Обратимся к ситуации, когда, в противоположность случаю Андреолетти – Фюрта, в (6) несущественны члены с $(r_0 B_0)'$, но важны члены с кривизной k_0. Пусть в областях, где $p \neq 0$, величина

$$r_0(\lambda) B_0(\lambda) = \text{const.} \tag{7}$$

Подставляя в (3) $\partial B/\partial\psi$ из (6) и $dl = \left(1 + k_0 \dfrac{\psi}{r_0 B_0}\right) d\lambda$, приходим к достаточному условию устойчивости тонкой $(\delta w \equiv \Delta \ll r_0, R_0)$ плазмы

$$\int \left(\frac{k_0}{r_0} - \frac{k_0 \cos\theta_0}{r_0} \frac{\psi}{B_0 r_0^2}\right) \frac{\partial}{\partial\psi} \frac{p_\perp + p_\parallel}{B^2} \, d\lambda > 0. \tag{8}$$

Потребуем, чтобы с точностью Δ^2/r_0^2 старший по ψ член в (8) обратился в нуль:

$$\int \frac{k_0}{r_0} \frac{p_\perp + p_\parallel}{B^2} \, d\lambda = 0, \tag{9}$$

что возможно, если $k_0(\lambda)$ знакопеременна. Тогда (8) сводится к

$$\int \frac{k_0 \cos\theta_0}{r_0^2} \psi \frac{\partial}{\partial\psi} \frac{p_\perp + p_\parallel}{B^2} \, d\lambda < 0. \tag{10}$$

Таким образом, при выполнении (9) и (естественных) распределениях давления, таких что $\psi \dfrac{\partial}{\partial\psi} \dfrac{p}{B^2} < 0$, для устойчивости достаточно $k_0 \cos\theta_0 > 0$ (такой случай и показан на рис. 1).

Устойчивость рассмотренной конфигурации связана с тем, что при $k_0 \cos\theta_0 > 0$ спад B как функции ψ в сторону выпуклости поля идет медленнее, чем линейно. Разумеется, постоянная часть в $\partial B/\partial\psi$ главная, так что в каждой из областей *1, 2* одна граница выпуклая и изолированные ловушки *1, 2* неустойчивы. В соединенных же ловушках $\partial B/\partial\psi$ усредняется по длине и при условии (9) грубые эффекты кривизны взаимно компенсируются; остающийся эффект эквивалентен наличию среднего $\min B$ (глубиной $\sim \Delta^2/r_0 R_0$), поскольку, как сказано, в обеих ловушках $\partial^2 B/\partial\psi^2 > 0$ (хотя ямы ни в одной нет).

Литература

1. *Kruskal M.D., Oberman C.R.* Phys. Fluids, 1958, **1**, 275.
2. *Andreoletti J.* Comptes rendus Acad. Sci., 1963, **256**, 1469.
3. *Taylor J.B., Hastie R.J.* Phys. Fluids, 1965, **8**, 323.
4. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Вопросы теории плазмы, под ред. М.А.Леонтовича, т. 2, М., Госатомиздат, 1963, стр. 79.
5. *Andreoletti J.* Comptes rendus Acad. Sci., 1963, **257**, 1235.
6. *Furth H.P.* Phys. Rev. Lett., 1963, **11**, 308.

Институт атомной энергии
им. И.В. Курчатова

Поступила в редакцию
15 апреля 1983 г.