Письма в ЖЭТФ, том 37, вып. 11, стр. 542 – 545 *5 июня 1983 г.*

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЭВОЛЮЦИИ СОЛИТОНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Ю.С.Кившарь, А.М.Косевич

На примере возмущенного синус-уравнения Гордона показано, что движение локализованной (солитоноподобной) части решения, описывающего эволюцию солитона под действием малых возмущений, не соответствует уравнениям адиабатического приближения.

В последнее время достигнуты значительные успехи в изучении нелинейных уравнений, точно интегрируемых методом обратной задачи [1]. Однако при изучении реальных физических систем возникают уравнения, которые, как правило, не являются точно интегрируемыми. Но иногда нелинейные уравнения, описывающие интересные физические явления, мало отличаются от точно интегрируемых уравнений. Решения таких уравнений обычно анализируют с помощью теории возмущений.

Широко известным нелинейным уравнением, используемым для описания свойств различных физических систем [2-5], является синус-уравнение Гордона (уравнение „sin-Gordon"–SG). Уравнение, мало отличающееся от уравнения SG, в безразмерных переменных имеет вид

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \epsilon R[u], \tag{1}$$

где ϵ = const – малый параметр, а оператор R определяет тип внешнего возмущения. Например, когда уравнение (1) описывает динамику одномерного кристалла в модели Френкеля – Конторовой [6], возмущение R учитывает отличие уравнений динамики дискретной цепочки от уравнения основного континуального приближения. В этом случае [5]:

$$\epsilon R[u] = \alpha u_x^2 u_{xx} + \beta u_{xxxx}. \tag{2}$$

Мы сосредоточим свое внимание на изучении эволюции солитонов в системах, описываемых уравнением [1]. Принято считать, что динамика солитона, находящегося под действием внешнего возмущения, хорошо описывается так называемым адиабатическим приближением [7-10]. Однако мы покажем, что последовательное применение теории возмущений, основанной на методе обратной задачи, [11] уже в первом порядке по малому параметру приводит к существенному отличию от результатов адиабатического приближения.

Решение уравнения (1), описывающее эволюцию солитона под действием малых возмущений, ищем в виде [11]:

$$u(x, t) = u_s(z) + \epsilon u^{(1)}(x, t) + \ldots \tag{3}$$

Первое слагаемое

$$u_s(z) = 4\,\mathrm{arctg}\; e^z, \qquad z = (x - \zeta)/(1 - v^2)^{1/2}, \tag{4}$$

называют адиабатическим приближением. Оно по форме совпадает с невозмущенным солитоном, однако его параметры ζ и v зависят от времени, причем $v = v_0$ и $\zeta = \zeta_0$ в момент $t = 0$. Для функций $u^{(1)}(x, t)$ выполняются начальные условия: $u^{(1)}(x, 0) = 0$.

Пользуясь схемой задачи рассеяния [1], а также уравнениями эволюции данных рассеяния только дискретного спектра под действием возмущений [12], можно получить с точностью до ϵ уравнения, определяющие в адиабатическом приближении зависимость параметров от времени [7,8]:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\epsilon}{4}(1 - v^2)^{3/2} J_0(v), \tag{5}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = v - \frac{\epsilon}{4} v(1 - v^2) J_1(v), \tag{6}$$

где

$$J_n(v) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{z^n R[u_s(z)]}{\mathrm{ch} z}, \quad n = 0, 1.$$

Используя уравнения обратной задачи [1] и решая уравнения возмущенной эволюции данных рассеяния непрерывного спектра [12], получим поправку первого порядка по ϵ, которую запишем в виде

$$u^{(1)}(x, t) = u_1(z) + u_2(z, \tilde{z}) + w(z, z^+, z^-), \tag{7}$$

где

$$u_1(z) = \frac{1}{4\mathrm{ch}z}\left\{\int_{-\infty}^{z} dy \frac{R[u_s(y)]}{\mathrm{ch}y} F(z, y) + \int_{z}^{\infty} dy \frac{R[u_s(y)]}{\mathrm{ch}\, y} F(-z, -y)\right\} , \tag{8}$$

$$u_2(z, \tilde{z}) = - \frac{v^2 \tilde{z}^2}{4\mathrm{ch}z} J_0(v) + \frac{v^2 \tilde{z}}{2\mathrm{ch}z} J_1(v) . \tag{9}$$

Здесь

$$\tilde{z} = (x - \zeta_0 - t/v_0) / (1 - v_0^2)^{1/2},$$

$$z^{\pm} = (x - \zeta_0 \pm t)/(1 - v_0^2)^{1/2},$$

$$F(z, y) = e^{-z}\mathrm{ch}z + e^{y}\mathrm{ch}y - z + y + v^2(z - y)^2 - 1.$$

Последние слагаемые в (7) описывают излучающиеся солитоном волны, которые распространяются со скоростями, существенно отличающимися от скорости солитона. Явный вид w мы не выписываем.

Рассмотрим нечетные возмущения, для которых $R[u_s(z)] = - R[u_s(-z)]$. К таким возмущениям относятся возмущение (2), возмущения типа рассмотренных в [3, 4], а также тривиальные добавки типа $\alpha \sin u$, которые не портят точную интегрируемость исходного уравнения.

Нетрудно проверить, что в случае нечетных возмущений второе слагаемое в (7) и содержащие v^2 члены слагаемого $u_1(z)$ полностью компенсируют добавку первого порядка, которая получается из адиабатического приближения. Поэтому скорость локализованной части решения в начальный период при $t \ll t_0 \sim (1 - v_0)^{-1/2}$ изменяется:

$$v = v_0 - \frac{\epsilon v_0 t^4}{6\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\mathrm{sh}z P[u_s(z)]}{\mathrm{ch}^3 z} . \tag{10}$$

Итак, под действием нечетных возмущений исходный солитон, в отличие от результата адиабатического приближения, ускоряется по закону (10).

Для времен $t \gg t_0$ решение (3) в первом порядке по ϵ имеет вид

$$u_{ds}(x, t) = 4\mathrm{arctg} e^{z} + \epsilon u_1(z_0), \quad z_0 = (x - \zeta_0 - v_0 t)/(1 - v_0^2)^{1/2}. \tag{11}$$

Выражение (11) будем называть деформированным солитоном, образованием которого завершается эволюция исходного локализованного возбуждения. Можно убедиться, что деформированный солитон (11) в рассматриваемом приближении является точным решением типа волны стационарного профиля для возмущенного уравнения (1). Например, для возмущения (2) деформированный солитон (11) с точностью до членов первого порядка можно записать в виде

$$u_{ds} = 4\mathrm{arc\,tg}\exp\{z[1 - \beta/2(1 - v_0^2)]\} + \frac{(2\alpha - 3\beta)}{(1 - v_0^2)^2} \frac{\left(\frac{2}{3} v^2 z_0 - \mathrm{th} z_0\right)}{\mathrm{ch}^2 z_0} . \tag{12}$$

При $2\alpha = 3\beta$ выражение (12) совпадает с первыми членами разложения по степеням α точного солитонного решения, найденного в работе [5].

В случае четных возмущений движение локализованной части решения (3) при $t \ll t_0$ также не описывается уравнениями адиабатического приближения. Например, под действием постоянной внешней силы начальное движение солитона не является равноускоренным, что прекрасно подтверждается численными экспериментами [13].

Таким образом, описание движения солитона под действием внешних возмущений в рамках адиабатического приближения, основанного на рассмотрении эволюции только дискретного спектра задачи рассеяния, не является адекватным физической ситуации. Необходимо учитывать поправки, возникающие из-за эволюции непрерывного спектра под действием возмущений, которые также дают вклад в динамику локализованной части решения (деформированный солитон).

Авторы благодарны В.А.Марченко и участникам его семинара за полезные обсуждения, а также А.Е.Боровику и Б.А.Иванову за интерес к работе.

Литература

1. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
2. *Барьяхтар В.Г., Иванов Б.А., Ким П.Д., Сукстанский А.Л., Хван Д.Ч.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **37**, 35.
3. *Risebarough P.S., Mills D.L., Trullinger S.E.* J. Phys., C, 1981, **14**, 1109.
4. *Рожков С.С.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **33**, 44.
5. *Kosevich A.M., Kovalev A.S.* Sol. St. Com., 1973, **12**, 763.
6. *Косевич А.М.* Основы механики кристаллической решетки. М.: Наука, 1972.
7. *McLaughlin D.W., Scott A.C.* Phys. Rev., 1978, **A 18**, 1652.
8. *Kaup D.J., Newell A.C.* Proc. Poy. Soc. London, 1978, **A 361**, 413.
9. *Bondeson A., Lisak M., Anderson D.* Phys. Scr., 1979, **20**, 479.
10. *Карпман В.И., Соловьев В.В.* Препринт ИЗМИРАН № 28, 294, 1980.
11. *Kaup D.J.* SIAM J. Appl. Math., 1976, **31**, 121; *Карпман В.И., Маслов Е.М.* ЖЭТФ, 1977, **73**, 537.
12. *Косевич А.М., Кившарь Ю.С.* ФНТ, 1982, **8**, 1270.
13. *Reinisch G., Fernandez J.C.* Phys. Rev., 1981, **B24**, 835.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15 февраля 1983 г.
После переработки
3 мая 1983 г.