

Оптический эффект Магнуса как следствие анизотропии фазы Берри

К. Ю. Блюх^{1)*}, Ю. П. Блюх[□]

⁺Радиоастрономический институт НАН Украины, 61002 Харьков, Украина

^{*}Bar-Ilan University, 52900 Ramat-Gan, Israel

[□]Department of Physics, Technion, 32000 Haifa, Israel

Поступила в редакцию 6 апреля 2004 г.

Построена модифицированная геометрическая оптика плавно неоднородной изотропной среды, учитывающая возникающую вследствие неоднородности слабую анизотропию. Указано на единство двух фундаментальных явлений: геометрической фазы Берри и оптического эффекта Магнуса, то есть распространения лучей правой и левой круговых поляризаций по разным траекториям. Показано, что первое явление означает различие фазовых скоростей волн правой и левой поляризаций, а второе происходит вследствие различия их групповых скоростей. Из уравнений статьи следует, что оптический эффект Магнуса является топологическим эффектом, зависящим только от геометрии контура системы в импульсном пространстве. Предсказано явление расщепления луча смешанной поляризации на два циркулярно поляризованных луча, и предложена схема эксперимента для наблюдения этого эффекта.

PACS: 03.65.Vf, 41.20.Jb, 42.15.-i

1. Введение. Первое последовательное изложение асимптотического приближения геометрической оптики (ГО) электромагнитных волн в плавно неоднородных изотропных средах содержится в работе Рытова [1]. ГО рассмотрена там в первом приближении, и там же содержится известный закон поворота плоскости поляризации электромагнитной волны. Геометрические свойства этого закона были подробно рассмотрены Владимирским в работе [2]. В 80-е годы прошлого столетия Берри и его последователи показали, что геометрические фазы являются общим фундаментальным свойством динамических систем, и поворот плоскости поляризации Рытова–Владимирского является одним из примеров фаз Берри (см. [3] и ссылки там).

Другое фундаментальное явление, не содержащееся в геометрической оптике Рытова, было обнаружено Зельдовичем с соавторами в 1990 г. [4]. Оно было названо “оптическим эффектом Магнуса” и заключается в том, что волны правой и левой круговой поляризации распространяются в плавно неоднородной среде по различным траекториям. Это явление было подтверждено экспериментально в волноводах в модовом пределе. Оптический эффект Магнуса потребовал и теоретического обоснования в рамках ГО, и в работе [5] была предложена феноменологическая

теория этого явления, вводящая дополнительные поправки в уравнения ГО.

В предлагаемой работе мы покажем, что эффект расщепления траекторий лучей разных поляризаций следует непосредственно из общих уравнений классической ГО при правильном учете набегающих геометрических фаз Берри. Основным при этом является следующее обстоятельство. Дело в том, что фазы Берри вследствие своей нелокальности могут неограниченно расти с ростом независимой переменной, тем самым сдвигая собственные числа (ляпуновские показатели) системы [6]. Для волн это означает, что набег фазы Берри изменяет эффективные показатели преломления и фазовые скорости волн. Учет этих малых добавок к показателям преломления приводит к слабой анизотропии среды, двулучепреломлению и, как следствие, распространению собственных мод по разным траекториям.

Полученные в работе результаты позволяют заключить, что оптический эффект Магнуса является не локальным явлением, а таким же фундаментальным топологическим эффектом, как и фаза Берри.

II. Теория. Рассмотрим эйконалы (фазы) право и лево поляризованных волн в плавно неоднородной изотропной среде:

$$\phi^{\pm} = \int_0^s k ds \pm \vartheta, \quad (1)$$

¹⁾e-mail: kostya@bliokh.kharkiv.com, k_bliokh@mail.ru

где k – текущее волновое число, s – длина дуги луча, а ϑ – геометрическая фаза Берри (фаза Рытова–Владимирского), возникающая у волн правой и левой поляризации с противоположными знаками. Здесь и далее плавность среды подразумевает коротковолновую асимптотику $k_0 \equiv \omega/c \rightarrow \infty$. Фаза Берри может быть представлена в виде [3]

$$\vartheta = \int_0^s \mathbf{G} \dot{\mathbf{p}} ds = \int_L \mathbf{G} d\mathbf{p}. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{k}/k_0$ – безразмерный импульс волны, $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{p})$ – некоторое непотенциальное поле в \mathbf{p} -пространстве, точка обозначает дифференцирование по s (то есть вдоль луча), а L – контур, по которому движется система в \mathbf{p} -пространстве. Физически измеряемые величины связаны с ротором поля \mathbf{G} , который равен [3]

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{G} \right] = -\frac{\mathbf{p}}{p^3}, \quad (p = |\mathbf{p}|).$$

Геометрическая фаза (2) может рассматриваться либо как интеграл вдоль луча, либо как контурный интеграл в \mathbf{p} -пространстве.

Определим эффективные показатели преломления из уравнения эйконала для (1), (2):

$$n^\pm = k_0^{-1} \left| \frac{\partial \phi^\pm}{\partial \mathbf{r}} \right| = n_0(\mathbf{r}) + n_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (3)$$

$$n_1 = \pm k_0^{-1} \frac{d\vartheta}{ds} = \pm k_0^{-1} \mathbf{G} \dot{\mathbf{p}},$$

где $n_0(\mathbf{r})$ – показатель преломления рассматриваемой изотропной среды. В традиционной ГО (см., например, [7]) поправка n_1 не возникает, поскольку эйконал выписывается в нулевом по k_0^{-1} приближении, а все слагаемые высшего порядка относятся к уравнениям переноса, то есть к амплитуде. Между тем, геометрическая фаза является величиной *нелокальной* и не может быть отнесена к амплитуде волны. Как мы увидим, полученная нами поправка n_1 приводит к коррекциям уравнений геометрической оптики, которые подтверждаются экспериментальными наблюдениями, и следовательно имеет под собой реальные физические основания. Заметим, что вследствие существенной зависимости геометрической фазы от траектории луча поправка n_1 зависит не только от текущей координаты \mathbf{r} , но и от *направления* волнового вектора, то есть *импульса* волны. Это указывает на возникающую слабую *анизотропию* локально изотропной среды.

Запишем гамильтоновы уравнения распространения лучей [7]. Выбирая гамильтониан в виде $H = p - n^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0$, получим

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{\partial n^\pm}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{r}} \pm k_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right), \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{l} \mp k_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right), \quad (5)$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{p}/p$ – единичный вектор нормали к фазовому фронту волны, он же является единичным вектором касательной к лучу в нулевом по k_0^{-1} приближении. Член $\dot{\mathbf{p}}$ в гамильтониане (см. (3)) следует рассматривать не как независимую величину, а только в смысле его выражения в теории возмущений из уравнений нулевого приближения.

Уравнения (4), (5) можно анализировать методом возмущений по параметру k_0^{-1} . Тогда первые члены правых частей соответствуют нулевому приближению и известным уравнениям ГО. Вторые слагаемые правых частей (4) и (5) вносят поправки порядка k_0^{-1} и их нужно рассматривать на решениях нулевого приближения. Тогда несложно определить, что второе слагаемое правой части (4) ответственно за изменение *фазовой* скорости волн по *величине*, но не *направлению* (см. подробнее в [8]). Исходя из (1)–(3) фазовые скорости правой и левой волн записываются в виде

$$\mathbf{v}_{ph}^\pm = \frac{c}{n_0} \left(1 \mp \frac{1}{n_0 k_0} \frac{d\vartheta}{ds} \right) \mathbf{l} = \frac{c}{n_0} \left(1 \mp \frac{\mathbf{G} \dot{\mathbf{p}}}{n_0 k_0} \right) \mathbf{l} \quad (6)$$

Второе слагаемое правой части уравнения (5) отвечает за отклонения траектории луча, то есть за изменения *групповой* скорости волны. При этом, как мы увидим, эта поправка направлена перпендикулярно лучу и изменяет *направление* групповой скорости. Подставим (2) в (5) и выпишем уравнение для смещения луча $\delta \mathbf{r}$ относительно траектории нулевого приближения:

$$\frac{d\delta \mathbf{r}}{ds} = \mp k_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{G} \dot{\mathbf{p}}) =$$

$$= \mp k_0^{-1} \left[\dot{\mathbf{p}} \times \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{G} \right] \right] \mp k_0^{-1} \left(\dot{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \mathbf{G}. \quad (7)$$

Здесь мы воспользовались известным векторным тождеством для градиента скалярного произведения. Проинтегрируем уравнение (7):

$$\delta \mathbf{r}^\pm = \mp k_0^{-1} \int_0^s \left\{ \left[\dot{\mathbf{p}} \times \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{G} \right] \right] + \left(\dot{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \mathbf{G} \right\} ds =$$

$$\pm k_0^{-1} \int_0^s \frac{[\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{p}]}{p^3} ds \mp k_0^{-1} \mathbf{G} \Big|_{\mathbf{p}_0}, \quad (8)$$

где мы использовали то, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{G} \right] = -\frac{\mathbf{p}}{p^3} [3], \text{ а } \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0).$$

Заметим теперь, что отклонение лучей (8) складывается из двух слагаемых. Первое из них нелокальное и может неограниченно расти с ростом s . Второе слагаемое – локальная функция импульса \mathbf{p} . Оно не может расти неограниченно и по порядку величины не превосходит длины волны $\lambda \sim k_0^{-1}$. Очевидно, второе слагаемое не может приводить к наблюдаемым траекторным эффектам. Здесь следует также заметить, что поле \mathbf{G} в теории геометрических фаз определено не однозначно, а с точностью до калибровочного преобразования $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G} + \partial\varphi/\partial\mathbf{p}$, где $\varphi(\mathbf{p})$ – произвольный скалярный потенциал. Этот произвол никак не сказывается на первом слагаемом (8), но изменяет второе. Это связано с неоднозначностью определения “траектории луча” в пределах длины волны. Скажем также, что если направление луча совпадает с начальным, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, все локальные члены обращаются в ноль.

Таким образом, исследуя отклонение лучей, мы должны оставить только первое слагаемое в (8). В результате имеем

$$\delta \mathbf{r}^\pm = \pm k_0^{-1} \int_0^s \frac{[\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{p}]}{p^3} ds = \mp k_0^{-1} \int_L \frac{[\mathbf{p} \times d\mathbf{p}]}{p^3}. \quad (9)$$

Как видно, смещение луча происходит перпендикулярно самому лучу: $\mathbf{p} d\delta \mathbf{r}^\pm / ds = 0$. Формула (9) показывает, что расщепление лучей, вызванное оптическим эффектом Магнуса, как и геометрическая фаза Берри (2) может быть представлена в виде контурного интеграла в \mathbf{p} -пространстве. Следовательно, оптический эффект Магнуса является фундаментальным топологическим эффектом. Фаза Берри и оптический эффект Магнуса представляют собой расхождения волн по фазе и траектории соответственно.

Отклонению (9) соответствует дифференциальное уравнение, аналогичное (5):

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{1} \pm \frac{1}{k_0 p^2} [\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{1}] = \mathbf{1} \pm \frac{1}{k_0 n_0} \left[\frac{\partial \ln n_0}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{1} \right], \quad (10)$$

где мы подставили $\dot{\mathbf{p}} = \partial n_0 / \partial \mathbf{r}$ из нулевого приближения уравнения (4) и использовали то, что $p \cong n_0$ из связи $H = 0$. Из (10) следуют выражения для групповых скоростей волн правой и левой поляризации:

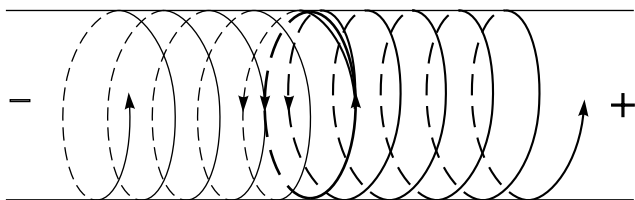
$$\mathbf{v}_g^\pm = \frac{c}{n_0} \left(\mathbf{1} \pm \frac{1}{k_0 p^2} [\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{1}] \right) =$$

$$= \frac{c}{n_0} \left(\mathbf{1} \pm \frac{1}{k_0 n_0} \left[\frac{\partial \ln n_0}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{1} \right] \right). \quad (11)$$

Это выражение указывает на то, что групповые скорости правой и левой волн в данном приближении одинаковы по величине, $|\mathbf{v}_g^+| = |\mathbf{v}_g^-| + O(k_0^{-2})$, но отклонены в противоположные стороны от луча нулевого приближения.

Уравнение (10) соответствует уравнению, полученному Зельдовичем и Либерманом в [5]. В этой работе показано, что это уравнение правильно описывает оптический эффект Магнуса в круглом волноводе в согласии с экспериментами [4]. Между тем, есть принципиальное различие между теорией работы [5] и предложенной выше теорией. Прежде всего, можно обратить внимание на разницу в гамильтониане для волн [5] и обычным геометрооптическим гамильтонианом с показателями преломления (3) в настоящей работе. Очевидно, теория [5] содержит избыточные переменные, которые усложняют задачу. Суть состоит в том, что поляризация волны рассматривается в [5] как независимая характеристика с непрерывным спектром. Между тем (см. [8]), собственными независимыми модами в первом приближении ГО являются только право и лево циркулярно поляризованные волны (это следует уже из их инвариантности относительно рытовской эволюции поляризации). Все остальные волны являются только результатом суперпозиции этих собственных мод. Это соответствует квантованию спиральности фотонов [9]. Поэтому поляризационная (спиновая) переменная для электромагнитных волн имеет только два собственных значения: ± 1 , что и отражено в настоящей работе. Вследствие этого факта, любая волна смешанной поляризации расщепляется при распространении в неоднородной среде на две образующие волны правой и левой круговых поляризации. Этот эффект расщепления волны на две независимые моды отсутствует в работе [5] (например, линейно поляризованная волна по теории [5] не испытывает изменений).

На рисунке 1 представлен пример, иллюстрирующий поляризационное расщепление волн. Там изображены лучевые траектории распространения волн в сверхразмерном круглом волноводе. Исходный линейно поляризованный финитный луч (толстая кольцевая линия) расщепляется на два луча правой (+) и левой (–) круговых поляризации, которые затем постепенно транспортируются вдоль круглого волновода в противоположные стороны. Подробный расчет приведенного примера и оптического эффекта Магнуса для меридиональных лучей с топологической точки зрения можно найти в [8]. Эксперимент, соответствующий рисунку, может быть осуществлен в



Поляризационное расщепление финитного луча смешанной (не циркулярной) поляризации на два собственных луча правой и левой циркулярных поляризаций

цилиндрической структуре, при возбуждении определенно ориентированного луча, отвечающего моде шепчущей галереи. Такой эксперимент позволил бы наблюдать *топологическое спиновое расщепление фотонов* (аналогичные эффекты для нерелятивистских частиц активно исследуются в настоящее время; см., например, [10] и ссылки там).

III. Заключение. Из первичных принципов: уравнения эйконала и гамильтонового подхода, мы вывели лучевые уравнения ГО плавно неоднородной изотропной среды в первом приближении по k_0^{-1} . В качестве отправного пункта мы использовали выражения для эйконалов волн, неоднократно полученные [1–3] из уравнений Максвелла. Смещение эйконалов волн за счет набега геометрических фаз означает различие фазовых скоростей волн правой и левой поляризаций²⁾, то есть различие их показателей преломления (3). Поправки к показателям преломления зависят не только от координат текущей точки пространства, но и от направления волнового вектора волны, что означает слабую анизотропию среды. По сути, учет членов порядка k_0^{-1} , пропорциональных $\partial n_0 / \partial \mathbf{r}$, снимает поляризационное вырождение однородной изотропной среды и делает ее слабо анизотропной. Независимыми собственными модами в этой среде являются волны правой и левой круговой поляризации.

Гамильтоновы уравнения (4), (5), (10) лучей, записанные для показателей преломления (3), содержат в себе поправки, отклоняющие траектории волн правой и левой поляризации в разные стороны. Это означает, в частности, что луч произвольной смешанной поляризации *расщепляется* при распространении на два луча правой и левой поляризации. Отклонение лучей разных поляризаций пропорциональ-

но производной по направлению от фазы Берри, то есть, фактически, анизотропии геометрической фазы. Таким образом, расщепление лучей разных поляризаций (9) (оптический эффект Магнуса) также нелокальный топологический эффект, определяемый только траекторией системы в \mathbf{p} -пространстве. Отсюда, в частности, следует вывод о том, что в одномерно неоднородной среде (где все лучевые траектории плоские и фаза Берри отсутствует) расщепления лучей не происходит.

Мы заключаем, что фаза Берри и так называемый оптический эффект Магнуса являются сопутствующими явлениями, возникающими в одном порядке k_0^{-1} в уравнениях геометрической оптики. Если фаза Берри означает различие *величин фазовых скоростей* правых и левых волн, то эффект Магнуса есть следствие различия *направлений групповых скоростей*.

Авторы искреннее признательны Ю. А. Кравцову и В. А. Пермякову за полезные дискуссии и интерес к работе.

1. С. М. Рытов, ДАН СССР **18**, 263 (1938).
2. В. В. Владимирский, ДАН СССР **31**, 222 (1941).
3. С. И. Виницкий, В. Л. Дебров, В. М. Дубовик и др., УФН **160**, 6 (1990); A. Shapere and F. Wilczek (Ed.), *Geometric Phases in Physics*, Singapore: World Scientific, 1989.
4. Б. Я. Зельдович, В. С. Либерман, Квантовая электроника **17**, 493 (1990); А. В. Дугин, Б. Я. Зельдович, Н. Д. Кундикова, В. С. Либерман, Письма в ЖЭТФ **53**, 186 (1991); А. В. Дугин, Б. Я. Зельдович, Н. Д. Кундикова, В. С. Либерман, ЖЭТФ **100**, 1474 (1991); A. V. Dooghin, N. D. Kundikova, V. S. Liberman, and B. Ya. Zel'dovich, Phys. Rev. **A45**, 8204 (1992).
5. V. S. Liberman and B. Ya. Zel'dovich, Phys. Rev. **A46**, 5199 (1992).
6. K. Yu. Bliokh, J. Math. Phys. **43**, 25 (2002); K. Yu. Bliokh, J. Math. Phys. **43**, 5624 (2002).
7. Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, М.: Наука, 1980.
8. K. Yu. Bliokh and Yu. P. Bliokh, arXiv: physics/0402014 (2004).
9. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория*, т. 1, М.: Наука, 1968.
10. F. Zhou, cond-mat/0311612 (2003).

²⁾ Вывод о разности фазовых скоростей волн правой и левой поляризации есть еще в пионерской работе Рытова [1]. Однако приведенная там соответствующая формула не верна, поскольку вычисления проводились в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся трехгранником Френе луча.