Письма в ЖЭТФ, том 35, вып. 1, стр. 3 – 5 *5 января 1982 г.*

УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ВИНТОВОГО СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ПИНЧА

В.Д.Пустовитов

Получены уравнения, описывающие процесс установления обращенного профиля среднего по магнитной поверхности продольного магнитного поля в винтовом пинче.

В "стабилизированном" пинче с обращенным на границе плазмы продольным магнитным полем осуществляется необходимый для устойчивости плазмы монотонный профиль числа вращения (запаса устойчивости) q [1] . Обращение поля и, соответственно, q поддерживается автоматически за счет турбулентной генерации вне пинча азимутальных токов.

В недавней работе Окавы и др. [2] показано, что обращение q можно осуществить и без внешних азимутальных токов, если поверхность пинча подвергнуть винтовой деформации. При этом конфигурация магнитного поля близка к стеллараторной, но с тем отличием, что продольное поле в пинче слабое, а ток омического нагрева относительно большой ($q \ll 1$). Подчеркнем, что в предложении Окавы речь идет не об обращении продольного поля локально в каждой точке по азимуту, а о более тонком эффекте, таком же, как эффект вращательного преобразования в стеллараторе.

Для осуществимости длительного поддержания устойчивой конфигурации винтового пинча важно установить, совместимо ли обращение q в нем с ламинарным законом Ома. Этот вопрос в [2] рассмотрен не был. Известно, что в цилиндрическом пинче обращение поля (и q) с обычным законом Ома несовместимо [1] и, как уже отмечалось, требует турбулентных механизмов генерации полоидального тока [3].

Для решения вопроса о совместимости обращения q с обычным законом Ома рассмотрим уравнения равновесия

$$\nabla p = [\,\mathbf{jB}\,], \ \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j}, \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

дополненные уравнением Максвелла для электрического поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \tag{2}$$

и проекцией обобщенного закона Ома на магнитное поле

$$\mathbf{j}\,\mathbf{B} = \sigma_{\parallel}\mathbf{EB}. \tag{3}$$

Как показано в [4, 5] , этого достаточно для описания плазмы, если вместо расчета переносов поперек магнитного поля считать заданным распределение давления плазмы p и продольной проводимости $\sigma_{\parallel}$.

При описании двумерной конфигурации с винтовой симметрией необходимо оперировать с интегральными характеристиками токов и потоков. В прямом винтовом пинче внешние по отношению к магнитной поверхности $a\ (r, \theta) = \text{const}$ поток Ψ и ток F через геликоидальную поверхность $\theta = \omega - az = \text{const}$ (r, ω, z –цилиндрические координаты) связаны с продольным током j и потоком Φ внутри магнитной поверхности $a = \text{const}$ соотношениями

$$j = -a_{22}\Psi' + a_{23}\Phi', \ F = -a_{23}\Psi' + a_{33}\Phi', \tag{4}$$

где штрих обозначает дифференцирование по a, а a_{ik} – коэффициенты, определяемые формой сечения магнитных поверхностей [6]

$$a_{33} = L^2 \left[\frac{dV}{da} \left\langle \frac{1}{1+a^2r^2} \right\rangle \right]^{-1}, \quad a_{23} = \frac{2a}{L^2} a_{33} \int_V \frac{dV}{(1+a^2r^2)^2}, \tag{5}$$

$$a_{22} = \frac{1}{L^2} \frac{dV}{da} \left\langle \frac{|\nabla a|^2}{1+a^2r^2} \right\rangle + \frac{a_{23}^2}{a_{33}},$$

V – объем внутри магнитной поверхности, L – полная длина системы, угловые скобки означают усреднение по слою между близкими магнитными поверхностями. Кроме традиционно используемых при описании систем с винтовой симметрией функций Ψ и F введем для явного учета "закрученности" системы внешние полоидальные поток Ψ_ω и ток I через прямую перегородку $\omega = \mathrm{const}$

$$\Psi_\omega = \Psi - N\Phi, \quad I = F - Nj. \tag{6}$$

где $N = aR$ $(2\pi R = L)$; $|N|$ – число периодов системы. Из (4) и (6) получаем

$$\Phi' = \Lambda(I + \mu j), \tag{7}$$

где $\Lambda = a_{22}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)^{-1}$, $\mu = N - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}$. Заметим, что μ представляет собой вращательное преобразование стелларатора без тока с такой же формой магнитных поверхностей, как и в рассматриваемом пинче. Как видно из (7), при $\mu \neq 0$, т.е. для конфигураций с некруглыми сечениями магнитных поверхностей, продольный поток Φ явно зависит от продольного тока j. Это и является проявлением "трансляционного преобразования" [2], которое, как и аналогичное вращательное преобразование в стеллараторе, осуществляется с помощью внешних винтовых полей. Из (7) следует, что этот эффект позволяет обратить $q = -\Phi'/\Psi'_\omega$ без обращения внешнего однородного продольного поля, т.е. без обращения I, за счет слагаемого μj.

С помощью уравнения

$$\Phi'\dot{\Psi} - \Psi'\dot{\Phi} = \frac{1}{\sigma_\parallel}(jF' - Fj'), \tag{8}$$

являющегося интегральным следствием (3) (точка – дифференцирование по времени) получим эволюционные уравнения для продольного тока j и среднего по магнитной поверхности поля $\bar{B}_z = \Phi'/2\pi a$ в пинче с внешней ЭДС ϵ_0. Если считать, что полоидальный поток в плазме не меняется, то $\epsilon_0 = -\dot{\Psi}_\omega$.

$$j' = -\frac{p'j}{\langle \mathbf{B}^2 \rangle} + \sigma_\parallel \frac{\Phi'^2(\epsilon_0 - \dot{\Phi}/q)}{\langle \mathbf{B}^2 \rangle V'}, \tag{9}$$

$$\bar{B}_z' = -\left[\frac{p'}{\langle \mathbf{B}^2 \rangle} + \frac{\Lambda}{a}\left(\frac{a}{\Lambda}\right)' + \sigma_\parallel \frac{j(\epsilon_0 - \dot{\Phi}/q)}{\langle \mathbf{B}^2 \rangle V'} \frac{\Lambda}{a_{22}} \right] \bar{B}_z + \Lambda\mu' \frac{j}{2\pi a}. \tag{10}$$

Последний член в (10), явно учитывающий закрученность системы и некруглость сечений $z = \mathrm{const}$ магнитных поверхностей, играет роль генератора поля $\bar{B}_z$. При его оценке нельзя пользоваться упрощенными моделями. В двухзаходной конфигурации, например, необходимо учитывать такой слабый эффект, как зависимость эллиптичности сечений магнитных поверхностей от их среднего радиуса. При слабой некруглости сечений этот член мал. Однако при $\bar{B}_z \to 0$ он становится главным и лишь благодаря ему возможно обращение знака $\bar{B}_z$: при $\bar{B}_z = 0$ производная $\bar{B}_z'$ имеет конечное значение (если $\mu' \neq 0$).

Таким образом, из полученного выражения (10) для эффективной генерации продольного поля следует, что в винтовом пинче обращение q возможно, причем это обращение совместимо с обычным законом Ома. Эффект возможен лишь при неоднородном "вращательном преобразовании" μ, определяемом формой сечений магнитных поверхностей. Обращение q не требует обращения продольного поля.

Уравнения (9), (10) позволяют описать и временной процесс установления обращенного профиля в винтовом пинче.

Автор благодарен В.Д.Шафранову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

1. *Bodin H.A.B., Newton A.A.* Nuclear Fusion, 1980, **20**, 1225.
2. *Ohkawa T., Chu M., Chu C., Schaffer M,* Nuclear Fusion, 1980, **20**, 1464.
3. *Кадомцев Б.Б.* Ядерный синтез, дополнение, 1962, **3**, 969.
4. *Pereversev G.V., Shafranov V.D., Zakharov L.E.* In Theoretical and Computational Plasma Physics, Vienna. 1978, p. 469.
5. *Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.* Препринт ИАЭ-3075, 1978.
6. *Grad H., Hu P.N., Stevens D.C.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 1975, **72**, 3789.

Институт атомной энергии
им.И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
9 октября 1981 г.