Письма в ЖЭТФ, том 35, вып. 2, стр. 70 – 72 *20 января 1982 г.*

СТРУКТУРА ДРЕЙФОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И УСЛОВИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ГЕОМЕТРИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Д.А.Панов

Показано, что расщепление и невложенность дрейфовых поверхностей заряженных частиц в магнитных ловушках с пробками обязаны нарушению взаимной ортогональности магнитных силовых линий и линий B = const на магнитных поверхностях. Получено условие ортогональности геометрии поля.

Расщепление [1 – 3] и невложенность [4, 5] дрейфовых поверхностей заряженных частиц в аксиально-несимметричных ловушках с магнитными пробками, определяющие скорость поперечного переноса плазмы [6, 7] и условия МГД-равновесия плазмы [5], можно рассмотреть с единой точки зрения, связав их с некоторыми метрическими характеристиками натуральной системы координат, задаваемой силовыми линиями и распределением модуля поля B в области удержания плазмы.

Ограничимся случаем, когда на каждой силовой линии, пронизывающей область удержания плазмы, имеется единственный минимум B. Расссмотрим поверхность минимума $BB_s'(\mathbf{r}) = 0$ (индекс „s" означает дифференцирование по направлению поля). Семейство магнитных силовых линий, проходящих через замкнутую кривую $B = B_0$ = const, расположенную в поверхности $B_s'(\mathbf{r}) = 0$, образует магнитную поверхность, которую примем в качестве координатной поверхности ξ^1 = const. Линии пересечения магнитной поверхности с поверхностями постоянного пробочного отношения $R(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r})/B_0$ = const примем в качестве координатных линий ξ^2. Очевидно, на линиях $\xi^2 B$ = const. Линии поля на магнитных поверхностях ξ^1 = = const примем в качестве координатных линий ξ^3.

Ларморовский центр частицы с магнитным моментом $\mu = m v_\perp^2/2B$ и нулевой продольной скоростью $v_\parallel = \mathbf{v\,B}/B = 0$, помещенный в минимум поля $B_{min} = B_0$ на магнитной поверхности ξ^1 = const, не покидает ее, дрейфуя вдоль линии минимума $B = B_0$ = const. Отмеченная особенность дрейфа частицы с $v_\parallel = 0$ является очевидным следствием сохранения полной энергии $mv^2/2$ и магнитного момента μ. Если нормальная к магнитной поверхнсоти ξ^1 = = const дрейфовая скорость v_{dN} равна нулю везде в области удержания частиц, то и при $v_\parallel \neq$ $\neq 0$ ларморовский центр дрейфует по поверхности ξ^1 = const, не покидая ее. Иначе говоря, дрейфовые поверхности не расщепляются и образуют вложенное семейство. В противном случае ларморовский центр частицы с $v_\parallel \neq 0$ покидает магнитную поверхность. Если $v_\parallel \neq 0$, но нормальные к магнитной поверхности смещения ларморовского центра в течение одного периода движения между точками отражения (одного баунс-периода) компенсируются точно, то дрейфовая поверхность оказывается расщепленной, но ее среднее положение по-прежнему совпадает с магнитной и, следовательно, свойство вложенности дрейфовых поверхностей сохраняется. Если нормальный дрейф в течение баунс-периода не компенсируется, то имеет место накапливающееся относительно магнитной поверхности смещение ларморовского центра, приводящее к пересечению дрейфовых поверхностей с отличающимися питч-углами, то есть дрейфовые поверхности оказываются невложенными.

Из дрейфового уравнения в форме [8]

$$\mathrm{v}_d = \mathbf{b}[\mathrm{v}_{\|} - (\mathrm{v}_{\|}^2/\omega_c)(\mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{b})] + (\mathrm{v}_{\|}/\omega_c)\mathrm{rot}\,\mathrm{v}_{\|}\mathbf{b}$$

непосредственно следует, что нормальная к магнитной поверхности скорость дрейфа v_{dN} записывается в виде

$$\mathrm{v}_{dN} = (\mathrm{v}_{\|}/\omega_c)\mathbf{N}\cdot\mathrm{rot}\,\mathrm{v}_{\|}\mathbf{b}, \tag{1}$$

где $\mathbf{N}$ – единичная наружная нормаль к магнитной поверхности, ω_c – циклотронная частота и $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$. При $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0$ и $\nabla\phi = 0$, где ϕ — электростатический потенциал, после несложных выкладок получим

$$\mathrm{v}_{dN} = (1/m\,\omega_c B)(\mu B + m\,\mathrm{v}_{\|}^2)B_s'\,\mathrm{ctg}\,\theta, \tag{2}$$

где θ – угол между магнитной силовой линией и линией $B = \mathrm{const}$ $(0 < \theta < \pi)$ на магнитной поверхности. Из полученного соотношения видно, что $\mathrm{v}_{dN} = 0$, если координатные линии ξ^2, ξ^3, образованные, соответственно, линиями $B = \mathrm{const}$ и линиями поля на магнитной поверхности $\xi^1 = \mathrm{const}$ взаимно ортогональны, то есть $\theta = \pi/2$. Магнитную конфигурацию, обладающую указанным свойством, будем называть магнитной конфигурацией с ортогональной геометрией поля. Множество конфигураций с ортогональной геометрией поля составляет, как следует из предыдущего, часть множества конфигураций, обладающих свойством вложенности дрейфовых поверхностей, в которых $\theta \neq \pi/2$ и, соответственно, $\mathrm{v}_{dN} \neq 0$, но усредненное по баунс-периоду смещение Δ_N ларморовского центра относительно магнитной поверхности $\xi^1 = \mathrm{const}$ обращается в ноль, то есть

$$\Delta_N = (1/T_b)\int_0^{T_b} \mathrm{v}_{dN}\,dt = 0. \tag{3}$$

Например, простая пробочная ловушка с дополнительным токонесущим проводником на оси, вызывающим винтовое закручивание силовых линий, или магнитное поле токамака не обладают свойством ортогональности, в то время как свойство вложенности дрейфовых поверхностей („омнигенность" в английской терминологии [5]) им присущи.

Чтобы получить условие ортогональности выпишем контравариантную компоненту $\mathrm{rot}\mathbf{B} = 0$:

$$\mathrm{rot}^1\mathbf{B} = (1/\sqrt{g})[(\partial B_3/\partial\xi^2) - (\partial B_2/\partial\xi^3)] = 0, \tag{4}$$

где g – детерминант метрического тензора g_{ik}. Учитывая, что $\cos\theta = g_{23}/\sqrt{g_{22}g_{33}}$, $B_2 = (g_{23}/\sqrt{g_{33}})B$, $B_3 = \sqrt{g_{33}}B$, $\partial B/\partial\xi^2 = 0$ и $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = ((1/\sqrt{g})\partial(B\sqrt{g}/\sqrt{g_{33}})/\partial\xi^3) = 0$, получим

$$\partial\sqrt{g_{33}}/\partial\xi^2 = (\sqrt{g}/\sqrt{g_{33}})(\partial/\partial\xi^3)(\sqrt{g_{22}g_{33}}\cos\theta/\sqrt{g}). \tag{5}$$

Если

$$g_{33} = g_{33}(\xi^1, \xi^3), \tag{6}$$

то есть компонента g_{33} постоянна на линиях ξ^2 или, что то же, на линиях $B = \mathrm{const}$, то $\partial\sqrt{g_{33}}/\partial\xi^2 = 0$ и, соответственно,

$$\cos\theta = C(\xi^1, \xi^2)\sqrt{g}/\sqrt{g_{22}g_{33}}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что, если $\cos\theta = 0$ где-нибудь на силовой линии, то при условии (6) $\cos\theta = 0$ на всей силовой линии. Условие (6) эквивалентно

$$B_s' = B_s'(\xi^1, \xi^3). \tag{8}$$

Действительно, $B_s' = \mathbf{b}\cdot\nabla B = b^i \partial B/\partial \xi^i = b^3 \partial B/\partial \xi^3 = (1/\sqrt{g_{33}})(\partial B/\partial \xi^3)$, поскольку $b^1 = b^2 = 0$ и $b^3 = 1/\sqrt{g_{33}}$. Но на линиях ξ^2 B = const и, следовательно, при выполнении (6) выполняется также и (8). Рассмотрим единичный вектор $\mathbf{t}$, касательный к линии B = const на магнитной поверхности. Очевидно, $\mathbf{t}\cdot\nabla B = 0$ и, в силу (8), $\mathbf{t}\cdot\nabla B_s' = 0$. Таким образом, $\mathbf{t} = \lambda \nabla B \times \nabla B_s'$, где λ некоторый скаляр. Если $\cos\theta = \mathbf{t}\cdot\mathbf{b} = 0$, то подставляя $\mathbf{t}$, получим

$$(\nabla B \times \nabla B_s')\cdot \mathbf{b} = 0, \tag{9}$$

что и является необходимым условием ортогональности геометрии поля. Используя тождество $\nabla B \equiv \mathbf{k}B + \mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\nabla B)$ $(\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0)$, где $\mathbf{k}$ – кривизна силовой линии, условие (9) можно переписать в виде

$$B''_{s\tau} = 0, \tag{10}$$

где смешанная производная вычисляется по направлениям силовой линии и бинормали к ней.

Можно показать, что условие ортогональности (9) или (10) является также и достаточным.

Литература

1. *Balebanov V.M. et al.* Plasma Phys., (J. Nucl. Energy, PC), 1963, **5**, 205.
2. *Siambis T.G., Trivelpiece A.W.* Phys. Fluids, 1965, **8**, 2047.
3. *Northrop T.G., Liu C.S., Kriskal M.D.* Phys. Fluids, 1966, **9**, 1503.
4. *Нортроп Т.Г.* Адиабатическая теория движения заряженных частиц, М.: Атомиздат, 1967.
5. *Hall L.S., McNamara B.* Phys. Fluids, 1975, **18**, 552.
6. *Рютов Д.Д., Ступаков Г.В.* Письма в ЖЭТФ, 1977, **26**, 186.
7. *Рютов Д.Д., Ступаков Г.В.* Физика плазмы, 1978, **4**, 501.
8. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.*, Сб. Вопросы теории плазмы, под ред. А.М.Леонтовича, М.: Госатомиздат, 1963.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакции
6 декабря 1982 г.