Письма в ЖЭТФ, том 35, вып.4, стр. 152 – 154 *20 февраля 1982 г.*

СКАЛЯРНОЕ ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СТЕЛЛАРАТОРА

М.И.Михайлов, В.Д.Пустовитов, В.Д.Шафранов

Получено скалярное двумерное уравнение равновесия плазмы в стеллараторе, аналогичное известному уравнению для токамака и пригодное для расчета предельного давления плазмы.

Как известно, расчеты равновесия, устойчивости и эволюции плазмы достаточно высокого давления в осесимметричных магнитных ловушках типа токамака производятся с помощью двумерного нелинейного скалярного уравнения для функции полоидального потока ψ. Оно имеет вид

$$r^2 \operatorname{div} \frac{\nabla\psi}{r^2} = -4\pi^2 r^2 \frac{dp(\psi)}{d\psi} - F(\psi)\frac{dF(\psi)}{d\psi} \ . \tag{1}$$

Здесь r – расстояние от главной оси плазменного тора, $p(\psi)$ – давление плазмы, $F(\psi)$ – полоидальный ток через контур r = const. Магнитное поле определяется формулой $\mathbf{B} = ([\nabla\psi\nabla\zeta] + F\nabla\zeta)/2\pi$, где ζ – полярный угол цилиндрической системы координат r, ζ, z. Для численных расчетов это уравнение удобно записать в потоковой системе координат $x^1 \equiv a$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \zeta$, связанной с внутренней геометрией системы. При этом $\psi = \psi(a)$, искомыми функциями являются $r = r(a, \theta)$, $z = z(a, \theta)$ (метод обращенных переменных[1-3]). Квадрат элемента длины в этих координатах $dl^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$: $g_{11} = r_a^2 + z_a^2$, $g_{12} = r_a r_\theta + z_a z_\theta$, $g_{22} = r_\theta^2 + z_\theta^2$, $g_{13} = g_{23} = 0$, $g_{33} = r^2$; $g^{11} = r^2 g_{22}/g \cdot g^{12} = -r^2 g_{12}/g$, $g = r^2(r_a z_\theta - r_\theta z_a)^2$.

В потоковой системе координат уравнение равновесия (1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial a}(a_{22}\psi') - \psi'\frac{\partial a_{12}}{\partial\theta} = -4\pi^2\sqrt{g}\frac{p'}{\psi'} - \frac{FF'}{\psi'}\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}, \tag{2}$$

штрих означает производную по a, $a_{ik} \equiv g_{ik}/\sqrt{g}$. Координату θ можно выбрать из условия $g_{12} = 0$ (ортогональные координаты), либо полагая $\sqrt{g}/r^2 = \mathcal{F}(a)$ (координаты с прямыми силовыми линиями), либо как полярный угол: $r = R - \rho(a,\theta)\cos\theta$, $z = \rho(a,\theta)\sin\theta$ и т.п. При этом (2) можно свести к нелинейному уравнению эллиптического типа (в третьем из указанных выборов – для функции $\rho(a,\theta)$).

Цель данной статьи – получить уравнение типа (2) для многопериодного стелларатора с круговой геометрической осью.

Пренебрежем для простоты тороидальными поправками к вакуумному стеллараторному магнитному полю $\mathbf{B}_{st} = \nabla\Phi_{st}$,

$$\Phi_{st} = B_0\left\{R\zeta + \sum_l \epsilon_l\frac{Rl}{m_l}I_l\left(\frac{m_l\rho}{R}\right)\sin(l\omega - m_l\zeta)\right\} \tag{3}$$

и будем использовать обычное "стеллараторное" приближение, в котором сечения вакуумных магнитных поверхностей близки к круговым и малы параметры a/R, $\beta = 2\bar{p}/\mathbf{B}^2$. Введем потоковые координаты с прямыми силовыми линиями a_v, θ_v, ζ вакуумной системы магнитных поверхностей и формально связанные с ними X, Y:

$$X = R - a_v\cos\theta_v,\quad Y = a_v\sin\theta_v. \tag{4}$$

Можно показать, что эти координаты связаны с цилиндрическими координатами r, z соотношениями[4]

$$\begin{aligned} r &= R - a_v(1+\delta)\cos\theta_v + \lambda a_v\sin\theta_v,\\ z &= a_v(1+\delta)\sin\theta_v + \lambda a_v\cos\theta_v, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} \delta(a_v,\theta_v,\zeta) &= \sum_l\frac{1}{a_v}\frac{df_l}{da_v}\cos(l\theta_v - m_l\zeta),\\ \lambda(a_v,\theta_v,\zeta) &= -\sum_l\frac{lf_l}{a_v^2}\sin(l\theta_v - m_l\zeta), \end{aligned} \tag{6}$$

$$f_l = \epsilon_l\frac{R^2 l}{m_l^2}I_l\left(\frac{m_l a_v}{R}\right). \tag{7}$$

Введем теперь потоковую систему координат a, θ, ζ при наличии плазмы. Тогда X, Y и a_v, θ_v, рассматриваемые как функции этих переменных, оказываются в используемом стеллараторном приближении не зависящими от ζ[5]. Это означает, что задача о равновесии сводится к двумерной. Выделим в $a_{ik} = g_{ik}/\sqrt{g}$ среднюю и переменную по ζ части: $a_{ik} = a^0_{ik}(a,\theta) + a_{ik}(a,\theta\ \zeta)$. Тогда в рассматриваемом приближении

$$\begin{aligned} a^0_{12} &= (X'\mathring{X} + Y'\mathring{Y})/RD,\quad a^0_{22} = (\mathring{X}^2 + \mathring{Y}^2)/RD,\\ a^0_{33} &= R[1 - k(R-X) + h_1(a_v)]/D,\\ (\sqrt{g})^0 &= R[1 - k(R-X) - h_2(a_v)]D,\\ D &= \mathring{X}Y' - X'\mathring{Y}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь штрихом обозначена производная по a, а точкой – по θ, $k = 1/R$ – кривизна геометрической оси. Функции h_1 и h_2 определяются формулами

$$2h_1 = \sum_l \left[A^2 f_l^2 - B \frac{f_l f_l'}{a_v} + (C + m_l^2/R^2) f_l'^2 \right],$$

$$2h_2 = \sum_l \left[\frac{l^2}{a_v^2} A f_l^2 - B \frac{f_l f_l'}{a_v} + C f_l'^2 \right], \tag{9}$$

где

$$A = m_l^2/R^2 + l^2/a_v^2, \quad B = m_l^2/R^2 + 3l^2/a_v^2, \quad C = \frac{l^2+1}{a_v^2}.$$

Искомое двумерное скалярное уравнение равновесия легко получается из общей системы уравнений равновесия в потоковых координатах[3] и выглядит следующим образом:

$$\psi' \left[\frac{\partial}{\partial a} (a_{22}^0 \psi') - \psi' \frac{\partial a_{12}^0}{\partial \theta} \right] = -4\pi^2 (\sqrt{g})^0 p' - \frac{FF'}{a_{33}^0} - \frac{DF\psi'}{R^2} \frac{1}{a_v} \frac{d}{da_v} \times$$
$$\times [a_v^2 \mu_0(a_v)]. \tag{10}$$

Оно отличается от (2) стеллараторными поправками в $(\sqrt{g})^0$ и a_{33}^0 и дополнительным слагаемым, содержащим вакуумное вращательное преобразование μ_0:

$$\mu_0(a_v) = \sum_l \epsilon_l^2 \frac{m_l l^3}{4\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi} \frac{dI_l^2(\xi)}{d\xi} \right], \quad \xi = \frac{m_l a_v}{R}. \tag{11}$$

Найдя решение уравнения (10) в виде функций $X(a, \theta)$, $Y(a, \theta)$ или $a_v(a, \theta)$, $\theta_v(a, \theta)$, можно по формулам (5) перейти к координатам r, z лабораторной системы координат. Тем самым будет учтена трехмерность равновесной конфигурации.

При выводе (10) мы использовали лишь близость к круговым вакуумных магнитных поверхностей. Искажения же, связанные с давлением плазмы, могут быть большими. Поэтому уравнение (10) может служить такой же основой для исследования стеллараторов, как уравнения (1), (2) для токамаков. Это дает возможность, например, вместо сложных трехмерных расчетов по оптимизации стеллараторов, включающей вопрос о предельном давлении плазмы, обойтись решением двумерного скалярного уравнения, используя хорошо разработанные методы решения аналогичного уравнения в теории токамаков.

Литература

1. *Shafranov V.D.* Nuclear Fusion, 1968, 8, 253.
2. *Вабищевич П.Н., Дегтярев Л.М., Фаворский А.П.* Физика плазмы, 1978, 4, 995,
3. *Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.* Препринт ИАЭ-3075, 1978.
4. *Михайлов М.И.* Физика плазмы, 1980, 6, 45.
5. *Mikhailov M.I., Shafranov V.D.* Proc. 10-th Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys., Moscow, 1981, 1, E-9.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
29 декабря 1981 г.