*Письма в ЖЭТФ, том 35, вып. 4, стр. 165 – 167* *20 февраля 1982 г.*

# ПЕРЕХОД ИЗ СОИЗМЕРИМОЙ В НЕСОИЗМЕРИМУЮ ФАЗУ В НЕПРЕРЫВНОЙ СРЕДЕ С ДИСЛОКАЦИЯМИ

*Т.Бор, В.Л.Покровский, А.Л.Талапов*

Изучен переход из соизмеримой в несоизмеримую фазу для анизотропной системы с порядком соизмеримости $p = 2$. В теорию типа "Sine-Gordon" добавлен член, описывающий рождение дислокаций. Показано, что с учетом дислокаций фазовый переход приобретает изинговский характер.

В настоящее время фазовый переход из соизмеримой в несоизмеримую фазу активно исследуется как теоретически, так и экспериментально[1-3]. Для систем, несоизмеримых с подложкой в одном направлении, недавно[4-6] было отмечено, что необходимо учитывать дислокации в солитонной структуре. Было показано, что регулярная решетка солитонов нестабильна по отношению к образованию дислокаций. Однако природа соответствующего фазового перехода и структура новой "расплавленной" фазы не были исследованы. Согласно[5] и[6], нестабильность возникает только при достаточно малом порядке соизмеримости $p$, а именно для $p^2 < 8$.

В настоящей работе мы рассмотрим фазовый переход в случае $p = 2$, который изучался экспериментально Жобером и др.[7]. С помощью методов, развитых Лютером и Пешелем[8] и Мандельштамом[9], мы покажем, что в этом случае для некоторой специальной температуры можно получить точное решение. Экспериментальная ситуация описывается теорией поля, подобной теории „sine-Gordon". Гамильтониан, входящий в матрицу перехода для этой системы, можно записать с помощью бозонного поля $\varphi$ и его импульса $P = (1/i)(\delta/\delta\varphi)$

$$H = \int_0^L dx \left\{ \frac{P^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \mu'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + m' \cos\beta\varphi + \lambda' \cos\left(\frac{2\pi p}{\beta}\int_\infty^x P\,dx\right)\right\}, \quad (1)$$

где $L$ – длина системы в направлении $x$. Первые два члена отвечают гармоническому упругому взаимодействию между адсорбированными атомами. Третий член описывает начальную несоизмеримость с подложкой. Слагаемое, содержащее $\cos\beta\varphi$ – это периодический потенциал взаимодействия атомов с подложкой. Последнее слагаемое описывает влияние дислокаций[10]. Постоянная $\lambda'$ пропорциональна вероятности рождения дислокации; $\beta$ пропорциональна квадратному корню из температуры.

Введем фермионные переменные $\psi_1$ и $\psi_2$. Используя [8] и [9], можно переписать (1) как гамильтониан обобщенной массивной модели Тирринга

$$H = \int \left\{ \frac{c}{i}\left(\psi_1^+ \partial_x \psi_1 - \psi_2^+ \partial_x \psi_2\right) - \mu\left(\psi_1^+\psi_1 + \psi_2^+\psi_2\right) + \right.$$

$$\left. + g\, \psi_1^+ \psi_1 \psi_2^+ \psi_2 + m\left(\psi_1^+\psi_2 + \psi_2^+\psi_1\right) + \lambda\left(\psi_1^+\psi_2^+ + \psi_2\psi_1\right)\right\} dx, \quad (2)$$

где

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{4\pi} + \frac{4\pi}{\beta^2}\right), g = \pi\left(\frac{4\pi}{\beta^2} - \frac{\beta^2}{4\pi}\right), m = m'\pi a, \ \lambda = \lambda'\pi a, \ \mu = \mu'\frac{2\pi}{\beta}. \quad (3)$$

Здесь $a$ – постоянная решетки.

При $\beta^2 = 4\pi$ $g = 0$, и мы получаем квадратичный гамильтониан с $c = 1$. Диагонализуя его с помощью преобразования Боголюбова, находим спектр

$$\epsilon(k) = \pm\left(k^2 + m^2 + \mu^2 + \lambda^2 + 2\sqrt{\mu^2 k^2 + \mu^2 m^2 + \lambda^2 m^2}\right)^{1/2}. \quad (4)$$

Плотность свободной энергии $F$ равна энергии основного состояния гамильтониана $H$, деленной на $L$. Заполнены те состояния из (4), энергия которых отрицательна. Изменение свободной энергии по сравнению со случаем $\lambda = m = 0$

$$\Delta F = -\frac{1}{L}\sum_{k>0}\left\{\sqrt{2}\,\left(k^2+m^2+\mu^2+\lambda^2+\sqrt{(k^2+m^2-\mu^2-\lambda^2)^2+4k^2\lambda^2}\right)^{1/2}-2k\right\}. \tag{5}$$

Фазовый переход происходит при $\mu^2 = \mu_c^2$ $\qquad \mu_c^2 = m^2 - \lambda^2,$ (6)

когда $\partial^2 F/\partial\mu^2$ логарифмически стремится к бесконечности.

Разность плотностей солитонов и антисолитонов равна $n = -\partial\Delta F/\partial\mu$. Для $|\mu - \mu_c| \ll m$, $\lambda \ll m$ находим

$$n = \frac{\lambda}{\pi}\, E\left(\frac{\sqrt{m^2-\mu^2}}{\lambda}\right), \tag{7}$$

где $E$ — полный эллиптический интеграл.

Согласно (4), спектр элементарных возбуждений при $\lambda \neq 0$ не имеет щели только при $\mu = \mu_c\,(m,\lambda)$. Поэтому корреляционная длина конечна для любого $\mu \neq \mu_c$. Следовательно, в отличие от случая $\lambda = 0$, система при $\mu > \mu_c$ не является двумерным несоизмеримым кристаллом со степенными корреляциями. Тем не менее, плотность солитонов (7) при условии $\mu - \mu_c \gg \lambda$ подчиняется закону $n \sim \sqrt{\mu - \mu_c}$, в согласии с[1,7]. В этой области корреляционная длина пропорциональна $\lambda^{-1}$, и на расстояниях, меньших $\lambda^{-1}$, система ведет себя как обычный несоизмеримый кристалл.

При $\mu \to \mu_c$ энергетическая щель $\Delta_0$ исчезает как $\Delta_0 \sim \mu - \mu_c$. Следовательно, корреляционная длина $\xi_0$ расходится по закону $\xi_0 \sim (\mu - \mu_c)^{-1}$. Так как $\mu - \mu_c$ играет роль приведенной температуры, то критический индекс $\nu$ имеет его изинговское значение $\nu = 1$. Поведение свободной энергии и корреляционной длины показывает, что фазовый переход очень похож на переход в двумерной модели Изинга. Такое поведение было предсказано ранее в[11] и в частном сообщении H.J.Schulz, где изучались дискретные модели. Действительно, если в $H$ из (2) с $g = 0$ сделать преобразование к переменным, в которых он при $\lambda = 0$ диагонален, и пренебречь ветвями спектра, энергия которых при $k = 0$ порядка $m$, то при малых $k$ получим гамильтониан, совпадающий с использовавшимся в[11].

До сих пор мы рассматривали специальный случай, когда $\beta^2 = 4\pi$. Мы ожидаем, что наши результаты будут верны и для других значений $\beta$, если величины $m$ и $\lambda$ заменить их ренормированными значениями $m_R$ и $\lambda_R$.

Уравнения ренормировки $m$ и $\lambda$ получены Вигманом[10] и Хозе и др.[12]. Присутствие члена с $\mu$ в (1) не приводит к их изменению, так как в ренормировку дают вклад импульсы $k \gg m$. Поэтому

$$m_R(\xi) \sim m \exp\left(1 - \frac{\beta^2}{4\pi}\right)\xi, \quad \lambda_R(\xi) \sim \lambda \exp\left(1 - \frac{4\pi}{\beta^2}\right)\xi, \tag{8}$$

где $\xi$ — логарифм характерной длины. Ренормировка прекращается при $\xi = -\frac{1}{2}\ln \times$ $\times\,(m_R^2 + \lambda_R^2)$ и для $\lambda \ll m$ получаем

$$m_R \sim m^{\frac{1}{(2-\beta^2/4\pi)}}, \quad \lambda_R \sim \lambda m^{\left(\frac{4\pi}{\beta^2}-1\right)/\left(2-\frac{\beta^2}{4\pi}\right)}. \tag{9}$$

Согласно (6), переход происходит только при условии $m \geqslant \lambda$. Поэтому критическая точка на фазовой диаграмме определяется уравнением $m_R = \lambda_R$. Из (9) находим критическую величину $\beta$

$$\frac{\beta_c^2}{4\pi} = 1 - q + \sqrt{1 - q + q^2}, \quad q = \frac{\ln m}{\ln \lambda}. \tag{10}$$

При $\lambda \to 0$ получаем известный результат $\beta_c^2 = 8\pi$.

В случае $p = 2$ соизмеримое состояние двукратно вырождено, что отвечает расположению атомов в двух разных подрешетках. Солитоны представляют собой границу между этими двумя состояниями. При $|\mu| << \mu_c$ почти вся плоскость занята одним их возможных состояний, а при $\mu = \mu_c$ оба состояния существуют в областях бесконечного размера. Это полностью аналогично поведению модели Изинга. Мы ожидаем, что параметр порядка $< \exp(i\beta\varphi/2) >$, т.е. фактор Дебая – Уоллера, уменьшается в соизмеримой фазе как $(\mu_c - \mu)^{1/8}$, так же как в модели Изинга. Такое предпереходное явление отсутствует при $\lambda = 0$. К числу предпереходных явлений относится также логарифмический рост теплоемкости и двумерной сжимаемости.

Один из авторов (Т.Б.) благодарен проф. И.М.Халатникову и сотрудникам института им. Ландау за теплое гостеприимство в период выполнения этой работы.

### Литература

1. *Покровский В.Л., Талапов А.Л.* ЖЭТФ, 1980, **78**, 269.
2. *Bak P., Ørsted H.C.* Institute preprint 1981, to be published in Rep. on Progress in Physics.
3. *Большов Л.А., Напартович А.П., Наумовец А.Г., Федорус А.Г.* УФН, 1977, **122**, 125; *Nielsen M., Ellenson W.D., McTague J.P.* In Proc. of the International Symp. on Neutron Inelastic Scattering, Vienna, 1977, IAEA, Vienna 1978, p. 433; *Birgeneau R.J., Heiney P.A., Pelz J.P.* Preprint MIT, 1981
4. *Люксютов И.Ф.* Письма в ЖЭТФ, 1980, **32**, 593.
5. *Coppersmith S.N., Fisher D.S., Halperin B.I., Lee P.A., Brinkman W.F.* Phys. Rev. Lett., 1981, **46**, 549.
6. *Villain J., Bak P.* J. de Physique, 1981, **42**, 657.
7. *Jaubert M., Glachant A., Bienfait M., Boato G.* Phys. Rev. Lett., 1981, **46**, 1679.
8. *Luther A., Peschel I.* Phys. Rev., 1974, **B9**, 2911.
9. *Mandelstam S.* Phys. Rev., 1975, **D11**, 3026.
10. *Wiegmann P.B.* J. of Phys., 1978, **C11**, 1583.
11. *Bohr T.* Phys. Rev., **B** February, 1982.
12. *Jose J.V., Kadanoff L.P., Kirkpatrick S., Nelson D.R.* Phys. Rev., 1977, **B16**, 1217.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау

Поступила в редакцию
14 января 1981 г.