Письма в ЖЭТФ, том 35, вып. 5, стр. 193 – 195 *5 марта 1982 г.*

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИМПУЛЬСА В ДЛИННОМ ЛАЗЕРНОМ УСИЛИТЕЛЕ

С.В.Манаков

Найдена характеристика длинного лазерного усилителя, т. е. определена структура импульса на выходе усилителя в зависимости от формы зажигающего импульса.

1. Распространение когерентного импульса в двухуровневой невырожденной среде в пренебрежении диссипативными эффектами описывается известной системой уравнений [1, 2]

$$E_x + E_t = 2\pi i\,\Omega\, d \int n(\omega)\, u(\omega)\, \bar{\mathrm{v}}(\omega)\, d(\omega)\,, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u_t &= i\,\omega\, u + i\, d\, E\, \mathrm{v}\,, \\ \mathrm{v}_t &= -i\omega \mathrm{v} + id\bar{E}u \end{aligned} \tag{2}$$

для комплексной огибающей электрического поля E и амплитуд вероятностей u, v пребывания „двухуровневого атома" в верхнем (нижнем) состояниях. Здесь Ω и d частота и дипольный момент перехода, функция $n(\omega) = N_+(\omega) - N_-(\omega)$, характеризующая неоднородное уширение, представляет собой разность начальных заселенностей верхнего и нижнего уровней. Считается, что среда занимает полупространство $x > 0$ и поле при $t \leqslant 0$ в среде отсутствует, а в момент времени $t = 0$ в среду начинает входить импульс $E(x,t)|_{x=0} = E_0(t)$, $E_0(t) = 0$ при $t < 0$. Обозначения в (1), (2) выбраны так, что надо считать $u(\omega, x, t) = 1$; $\mathrm{v}(\omega,x,t) = 0$ при $t = 0$. Мы опишем $E(x, t)$ в зависимости от $E_0(t)$ при достаточно больших x в случае инверсно-заселенной среды $N = \int n(\omega) d\omega > 0$, т. е. предъявим "характеристику" длинного усилителя.

2. Возможность подробного изучения системы (1), (2) связана с тем, что к ней применим метод обратной задачи. Не вдаваясь в подробности, мы приведем здесь лишь необходимые для дальнейшего факты; детали можно найти в [3,4]. Идентификация используемых обозначений с обозначениями [3] проводится без труда.

Обозначим через $\chi(\omega, x, t)$ вектор

$$\chi = (\chi_1, \chi_2) = (u(\omega, x, t), \mathrm{v}(\omega, x, t))\, e^{-i\omega t}.$$

Функция χ удовлетворяет уравнению

$$\chi(\omega) = (1, 0) - \frac{1}{2\pi i} \int_C R(\omega', x) e^{-2i\omega' t}\, \tilde{\chi}(\omega')\, \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}\,, \tag{3}$$

где $\tilde{\chi} = (-\bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1)$, а $R(\omega', x)$ – стандартным образом определенный коэффициент отражения для системы (2). Зависимость R от x дается выражением

$$R(\omega, x) = R(\omega, 0) \exp 2ix\left(\omega - \frac{1}{2}\int \frac{\pi\,\Omega\, d^2 n(\omega')}{\omega' - \omega - i0}\, d\omega'\right). \tag{4}$$

$R(\omega, 0)$ подсчитывается по входящему импульсу $E_0(t)$. Контур интегрирования C в (3) проходит в верхней полуплоскости.

Уравнения (3), (4) представляют собой систему уравнений обратной задачи. Ее решения определяют $u(\omega, x, t)$ и $\mathrm{v}(\omega, x, t)$ и, тем самым, $E(x, t)$.

Мы будем считать, что $E_0(t)$ имеет степенное поведение в нуле, $E_0(t) = ct^{\upsilon}$ при $t > 0$. Без ограничения общности c можно считать вещественным. Для таких E_0 асимптотика $R(\omega, 0)$ при $\omega \to \infty$, $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ имеет вид

$$R \simeq c'\,\omega^{-(\upsilon+1)}, \qquad c' = -i^{\upsilon} 2^{-(\upsilon+1)} \Gamma(\upsilon + 1)\, dc \tag{5}$$

(как выяснится, вся структура $E(x, t)$ при больших x определяется именно поведением E_0 в нуле и не чувствительна к дальнейшему ходу этой функции. Иными словами, форма импульса в длинном усилителе определяется исключительно фронтом зажигающего импульса).

3. Введем обозначения

$$z = 4\,\Omega_0\,\sqrt{x\,(t-x)}\,, \qquad \Omega_0^2 = \frac{\Omega\,\pi\,d^2}{2}\int n\,(\omega)\,d\omega\,.$$

При больших x и не слишком больших $z\ (z \ll \Omega_0 x)$ уравнения (3) (с учетом (4), (5)), упрощаются до вида

$$\chi(\Lambda) = (1,\ 0) - \frac{f_\upsilon}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-i\frac{z}{2}(\Lambda' - \frac{1}{\Lambda'})}}{\Lambda' - \Lambda}\,\frac{\widetilde{\chi}\,(\Lambda')}{\Lambda'^{\,\upsilon+1}}\,d\,\Lambda', \tag{6}$$

где

$$\Lambda = \frac{z}{4\Omega_0^2 x}\,\omega\,, \qquad f_\upsilon = c'\left(\frac{z}{\Omega_0^2 x}\right)^{\upsilon+1}\,. \tag{7}$$

При $z \gg 1$ значение интеграла в (6) определяется окрестностью перевальной точки $\Lambda' = i$. Формальное вычисление правой части (6) с точностью до $O\,(e^{z}/z^{N+1/2})$ дает выражение для $\chi(\Lambda)$ через значение функции $\widetilde{\chi}(\Lambda)$ и ее $2N$ первых производных взятых при $\Lambda = i$. Это обстоятельство позволяет написать замкнутую систему линейных алгебраических уравнений на $\chi, \chi', .. \chi^{(2N)}|_{\Lambda=-i}$ и $\widetilde{\chi}, \widetilde{\chi}',... \widetilde{\chi}^{(2N)}|_{\Lambda=i}$, решение которой определяет $\chi(\Lambda)$ и, в конечном счете, $E\,(x,\ t)$. Особенно просто выглядит ответ в пределе очень больших x: если $\ln\ln \Omega_0 x > 1$, то вблизи фронта импульса E имеет вид последовательности 2π-импульсов

$$E\,(x,\,t) = 8\,\Omega_0^2\,x\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^k}{z_k}\,\mathrm{ch}^{-1}\left[\frac{8\Omega_0^2\,x}{z_k}\,(t - x - \xi_k)\right], \tag{8}$$

где $z_k \simeq (\upsilon+1)\ln\Omega_0 x - \left(\upsilon + \dfrac{3}{2} - k\right)\ln\ln\Omega_0 x$, $\xi_k = (1/x)(z_k/4\Omega_0)^2$. Таким образом, в указанном пределе фронт импульса состоит из последовательности чередующихся 2π- и -2π-импульсов убывающей ширины $\tau \simeq (\upsilon+1)\,(\ln\Omega_0 x)\,/\,(8\,\Omega_0^2 x)$ и растущей амплитуды $|E| \simeq 8\,\Omega_0^2 x$: $(\upsilon+1)\ln\Omega_0 x$. Расстояние между солитонами ведет себя как $\Delta\tau \approx 2\tau\ln\ln\Omega_0 x$. При данном N выражение (8) пригодно при $z < z_{N+1} + {}^1/_2\ln\ln\Omega_0 x$. Отметим, однако, что указанный ответ вообще справедлив лишь при $z < z_{N_{max}}$, где $N_{max} \sim \ln\Omega_0 x/\ln\ln\Omega_0 x$.

4. Из (6), (7) следует, что величина $U = d\int_0^t E\,(x,\ t')\,dt'$ удовлетворяет уравнению

$$U_{xt} + U_{tt} = 4\Omega_0^2\,\sin U. \tag{9}$$

Это уравнение имеет автомодельные решения (см.[5, 6]), зависящие только от $z = 4\Omega_0\sqrt{x(t-x)}$, такие, что

$$U_{zz} + \frac{1}{z}\,U_z = \sin U. \tag{10}$$

Регулярные в нуле решения этого уравнения однозначно определяются значением решения в нуле

$$U = U\,(U_0,\,z), \qquad U\,(U_0,\ 0) = U_0,$$

так что U_0 параметризует семейство решений (10).

Важно отметить, что параметр U_0 можно объявить достаточно произвольной медленной функцией отношения x/z. В этом случае $U(U_0(x/z),\ z)$ будет всюду мало отличаться от истинного решения уравнения (9). То, что в рассматриваемой задаче возникают именно такие „квазиавтомодельные" решения, видно прямо из уравнений (6), (7): зависимость χ от координат x и t собирается, в основном, в зависимость от z, поскольку от f_υ решение зависит, грубо говоря, лишь логарифмически.

Конкретный вид зависимости от x/z можно установить следующим образом. При $U_0 << 1$ решение (10) имеет вид

$$U = U_0 I_0(z), \tag{11}$$

где I_0 – функция Бесселя мнимого аргумента. Если $\ln{}^1/{U_0} > 1$, то (11) справедливо и при больших z, когда I_0 можно заменить ее асимптотикой

$$U = U_0 e^z / \sqrt{2\pi z}.$$

Соответствующее выражение для E имеет вид

$$E = \frac{8U_0}{d\sqrt{2\pi}} \Omega_0^2 \frac{x}{z^{3/2}} e^z . \tag{12}$$

С другой стороны, при больших x и z, в области где выполнено неравенство $f_v e^z < 1$, решение (6) можно получить простой итерацией; в этой области

$$Ed = -8e^{i\frac{\pi v}{2}} \bar{f}_v \frac{\Omega_0^2 x}{z} I_v(z) \simeq -\frac{8}{\sqrt{2\pi}} i^v \bar{f}_v \left(\frac{z}{x}\right) \frac{\Omega_0^2 x}{z^{3/2}} e^z . \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (13) получаем

$$U_0 = c\Gamma(v+1)(z/8\,\Omega_0^2\, x)^{v+1} . \tag{14}$$

Выражение для поля, $E = d^{-1} U_t$ имеет вид

$$E(x, t) = \frac{8\Omega_0^2 x}{dz} U_z\,(U_0\,(z/x), z). \tag{15}$$

Область применимости (14), (15) дается неравенствами $z >> 1, \ln{}^1/{U_0} >> 1$.

Итак, найденное выражение для поля в длинном лазерном усилителе имеет квазиавтомодельный характер. Поле в импульсе растет примерно как x, а ширина импульса убывает как $1/x$. Структура импульса определяется исключительно фронтом зажигающего импульса (параметры c и v в (14)).

Что касается степени явности выражения (15), то, хотя в общем случае решение уравнения (10) и не выражаются ни через какие затабулированные функции (они относятся к так называемым трансцендентам Пенлеве), в интересующем пределе $\ln{}^1/{U_0} > 1$ $U(U_0, z)$ аппроксимируются эллиптическими функциями с медленно меняющимися параметрами.

Я благодарен В.Е.Захарову за привлечение моего внимания к данному кругу вопросов и И.Габитову и А.Михайлову за полезные обсуждения.

Литература

1. *McCall S.L., Hahn E.L.* Phys. Rev., 1969, **103**, 183.
2. *Lamb G.L.*,Jr. Rev. Mod. Phys., 1971, **43**, 99.
3. *Ablowitz M.J., Kaup D.I., Newell A.C.* J.Math. Phys., 1974, **15**, 1852.
4. Теория солитонов: Метод обратной задачи *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* М.: Наука, 1980.
5. *Lamb G.L.*, Jr. Phys. Lett., 1969, **29A**, 507.
6. *Захаров В.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1980, **32**, 603.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау

Поступила в редакцию
22 декабря 1981 г.