Письма в ЖЭТФ, том 35, вып. 6, стр. 258 – 260 *20 марта 1982 г.*

О ВЫЧИСЛЕНИИ ФЕРМИОННОГО ДЕТЕРМИНАНТА В КИРАЛЬНЫХ И СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ

А.И.Вайнштейн, В.И.Захаров

Предложен способ интегрирования по фермионным полям в киральных и суперсимметричных теориях с реальным представлением для фермионов. Рецепт позволяет обойти обычные трудности продолжения в евклидовское пространство. Вычислено эффективное фермионное взаимодействие, обусловленное инстантонами малых размеров, в суперсимметричной глюодинамике и показано, что эффективный лагранжиан не инвариантен относительно преобразований суперсимметрии.

Киральные теории, то есть теории с несимметрией между правыми и левыми частицами, широко используются в современной теории элементарных частиц. Достаточно напомнить теорию электрослабого взаимодействия. Тем не менее, в киральных теориях есть серьезные трудности. В частности, невозможно продолжение в евклидовское пространство (необходимость чего очевидна при попытке вычислить непертурбативные эффекты, например, эффекты инстантонов). Действительно, в евклидовском пространстве, в отличие от пространства Минковского, как вейлевский спинор φ так и его эрмитово сопряженное поле ϕ^+ преобразуются по одному представлению, и нельзя построить даже кинетической энергии, не вводя дополнительных полей. Эта проблема отмечалась многими авторами и сейчас излагается в учебниках [1]. В пространстве Минковского трудности не столь очевидны, но тоже присутствуют. Введение как левых, так и правых полей требуется массивными регуляторами, и их массовый член нарушает калибровочную инвариантность.

В настоящей статье мы предлагаем решение этих проблем для киральных теорий, в которых фермионы образуют так называемое реальное представление. Более подробно, матрицы генераторов T_a на представлении и на комплексно сопряженном ему должны быть унитарно эквивалентны:

$$T^a = U(-T^a)^T U^+. \tag{1}$$

Под это условие попадают простейшие киральные и суперсимметричные теории: калибровочная группа $SU(2)$ и дублет вейлевских или триплет майорановских спиноров, взаимодействующих с векторными полями. Мы ограничимся здесь этими примерами.

Поясним предлагаемый рецепт интегрирования по фермионным полям на примере теории со следующим лагранжианом:

$$L = -\frac{1}{4}(G^a_{\mu\upsilon})^2 + \phi^+\sigma^R_\mu iD_\mu\phi, \tag{2}$$

где $G_{\mu\upsilon}$ $(a = 1, 2, 3)$ – тензор напряженности глюонного поля, ϕ^k_a $(k, a = 1, 2)$ – дублет вейлевских спиноров (k – цветовой индекс), ковариантная производная D_μ равна $\partial_\mu + igT^a A^a_\mu$, $T^a = \tau^a/2$ для дублета и, наконец, $\sigma^R_\mu = (1, \vec{\sigma})$.

Производящий функционал записывается как

$$Z(\eta, \eta^+) = \int DA e^{-\frac{i}{4}\int (G^a_{\mu\nu})^2 d^4x} \Phi(A, \eta, \eta^+) \tag{3}$$

$$\Phi(A, \eta, \eta^+) = \int D\phi D\phi^+ \exp i \int d^4x \{\phi^+ \sigma^R_\mu i D_\mu \phi + \eta^+\phi + \phi^+\eta\},$$

где η – внешний источник, ϕ, ϕ^+ – грассмановы переменные.

Сделаем линейную замену переменных

$$\phi^k_a = (\tau_2)^{km} (\sigma_2)_{a\beta} \chi^{*m}_\beta \tag{4}$$

и соответствующую замену для ϕ^+. Тогда Φ переходит в

$$\Phi(A, \eta, \eta^+) = \int D\chi D\chi^+ \exp i \int d^4x \{-\chi^+ \sigma^L_\mu i D_\mu \chi - \chi^+(\sigma_2\tau_2\eta^*) - (\eta^T \sigma_2 \tau_2)\chi\}, \tag{5}$$

где $\sigma^L_\mu = (-1, \vec{\sigma})$. Как соотношение (3) так и (5) не допускают непосредственного продолжения в евклидовское пространство или явно калибровочно инвариантной регуляризации массивными полями. Трюк состоит в том, чтобы определить фермионный детерминант как корень квадратный из произведения (3) и (5) [1)]. Тогда возможен переход к четырехкомпонентной записи и, следовательно, интегрирование по фермионным полям стандартное [3]. Явно:

$$\Phi^2(A, \eta, \eta^+) = \int D\Psi D\bar{\Psi} \exp i \int d^4x \{\bar{\Psi}\gamma_\mu i D_\mu \Psi + \bar{j}\Psi + \bar{\Psi} j\}, \tag{6}$$

где j, Ψ выражаются через первоначально введенные величины:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad j = \begin{pmatrix} -\tau_2\sigma_2\eta^* \\ \eta \end{pmatrix}$$

Теперь если, скажем, необходимо найти эффект инстантонов, то он сначала вычисляется в четырехкомпонентной записи (6), со всеми необходимыми регуляризациями, а затем извлекая из ответа корень получаем выражение для исходной, двухкомпонентной записи. (Возникающая неопределенность в знаке, легко видеть, устранима нормировкой на теорию возмущений).

Мы приведем результат для другой теории – суперсимметричной глюодинамики, поскольку он более интересен с практической точки зрения. Лагранжиан обычно записывают в виде

$$L = -\frac{1}{4} (G^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} \lambda^{aT} \gamma_0 \gamma_\mu i D_\mu \lambda^a, \tag{7}$$

где λ^a – триплет майорановских частиц и генераторы T^a берутся, соответственно в триплетном представлении, $(T^a)_{bc} = i\epsilon_{bac}$. Майорановские спиноры, как известно, переписываются в терминах вейлевских, после чего можно применить описанную выше технику.

Для явного вычисления необходимо знание нулевых фермионных мод в поле инстантона. Их в данном случае 4:

$$\phi^a_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\rho^2}{(x^2 + \rho^2)^2} \sigma^a v_{1,2}; \qquad v_1 = w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

---

1) Как отметил А.А.Мигдал, возведение в квадрат статсуммы с целью переписать ее в виде интеграла по фермионам использовалось в модели Изинга (см. [2]).

$$\phi^a_{3,4} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\rho}{(x^2+\rho^2)^2}\,\sigma^a\sigma^+_\mu\,\chi_\mu\,w_{3,4}\,; \qquad v_2 = w_4 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

где $\sigma^+_\mu \simeq (-i, \vec{\sigma})$, ρ – размер инстантона.

Зная нулевые моды можно вычислить детерминант (6) как и в обычном случае [4]. Извлечение корня также не представляет труда.

Результат приведем сразу для эффективного четырехфермионного взаимодействия обусловленного инстантонами (антиинстантонами) малых размеров:

$$L_{eff} = \frac{4\pi^4}{3}\left(\frac{2\pi}{a_s}\right)^4 \exp\left(-\frac{2\pi}{a_s}\right)\frac{d\rho}{\rho^5} \times$$
$$\times\left\{\lambda^{aT}\gamma_0\lambda^a\partial_\mu\lambda^{bT}\gamma_0\partial_\mu\lambda^b + \lambda^{aT}\gamma_0\gamma_5\lambda^a\partial_\mu\lambda^{bT}\gamma_0\gamma_5\partial_\mu\lambda^b - \frac{1}{2}\lambda^{aT}\gamma_0\sigma_{\alpha\beta}\lambda^b\partial_\mu\lambda^{bT}\gamma_0\sigma_{\alpha\beta}\partial_\mu\lambda^a\right\} \tag{9}$$

где $$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha).$$

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу полученных результатов. Условие (1), как мы видим, означает, что теория фактически векторободобна. Действительно, в записи (6) нет аксиального тока вовсе. Условие же (1) гарантирует отсутствие треугольных аномалий [5]. Однако, треугольные аномалии отсутствуют и в модели Вайнберга – Салама (или в ее $SU(5)$ и $SO(10)$ обобщениях). Переход же к записи (6) в последнем случае невозможен, и формулировка теории в евклидовском пространстве остается недостигнутой. Возможно, это отражает серьезные трудности.

Что касается практических приложений, то подчеркнем, что эффективный лагранжиан (9) явно нарушает суперсимметрию. Действительно, преобразования суперсимметрии переводят фермионные поля в бозонные. Мы же в рассматриваемом приближении получили только фермионное эффективное взаимодействие. С вычислительной точки зрения причина такой асимметрии очевидна: только фермионные нулевые моды зануляют детерминант. Напрашивается аналогия с известным случаем $U(1)$ симметрии, где эффективный лагранжиан также явно нарушает симметрию [4], и она действительно явно (не спонтанно!) нарушена. Мы думаем, что то же верно и для суперсимметрии. Однако, подробное рассмотрение этого вопроса (совместно с В.А.Новиковым и М.А.Шифманом) выходит за рамки этой заметки.

Авторы благодарны В.А.Новикову и М.А.Шифману за весьма подробные обсуждения.

Литература

1. *Ramond P.* "Field Theory. A Modern Primer" Benjamin – Cumming Publ. Comp., 1981.
2. *Попов В.Н.* Континууальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике , М.: Атомиздат, 1976.
3. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования, М.: изд. Наука, 1965.
4. *G. 't Hooft,* Phys. Rev., 1976, **D14**, 3432.
5. *Georgi H., Glashow S.L.* Phys. Rev., 1972, **D6**, 429.

Институт
теоретической и экспериментальной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 января 1982 г.