Письма в ЖЭТФ, том 38, вып.3, стр. 132 – 135 *10 августа 1983 г.*

ПОЯВЛЕНИЕ СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ И ϵ-РАЗЛОЖЕНИЕ

С.М.Апенко

Предложен метод вычисления порогового значения константы связи g_c, при котором впервые возникает связанное состояние в трехмерной задаче двух тел. При этом величина g_c сначала вычисляется в пространстве размерности $d = 2 + \epsilon$, в виде ряда по степеням ϵ, а результат экстраполируется к $\epsilon = 1$. Оказывается, что уже два первых члена ϵ-разложения дают хорошее приближение для g_c.

Хорошо известно, что в трехмерной задаче двух тел, с короткодействующим потенциалом взаимодействия, связанное состояние существует не при любом значении константы связи g, а лишь при $g \geqslant g_c$, где g_c – критическое значение константы связи, зависящее от вида потенциала. Величина g_c является важной характеристикой потенциала взаимодействия и в ряде случаев бывает необходимо знать ее точное значение. Поскольку аналитическое решение уравнения Шредингера далеко не всегда оказывается возможным, большое значение приобретают при этом приближенные и численные методы.

В данной статье мы предлагаем простой метод приближенного вычисления g_c в задаче двух тел (для s-состояния) для произвольного короткодействующего потенциала. Основная идея метода использует то обстоятельство, что в пространстве двух измерений $g_c = 0$, так как там уже сколь угодно слабый потенциал приводит к образованию связанного состояния. Если теперь перейти к пространству размерности $d = 2 + \epsilon$, то оказывается возможным получить выражение для $g_c(\epsilon)$ в виде ряда по степеням ϵ [1)]. Для того, чтобы получить искомое значение g_c нужно в каждом члене этого ряда положить $\epsilon = 1$ (ср. с определением критических индексов в теории фазовых переходов методом ϵ-разложения [2]). Как мы увидим

1) Можно усмотреть в этом некоторую аналогию с вычислением температуры фазового перехода в нелинейной $O(N)$ σ-модели при $d = 2 + \epsilon$ [1].

ниже, уже два первых члена разложения $g_c(\epsilon)$ в ряд по ϵ дают, для целого ряда потенциалов, довольно хорошее приближение для g_c при $\epsilon = 1$.

Исходным пунктом наших рассуждений будет уравнение Шредингера для волновой функции s-состояния, записанное в пространстве размерности $d = 2+\epsilon$ ($\hbar = 2m = 1$)

$$-\frac{1}{r^{\epsilon+1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\epsilon+1}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) - gV(r)\Psi = E\Psi. \qquad (1)$$

Положительные значения g соответствуют притяжению. С помощью подстановки $\Psi = \phi r^{-\epsilon/2}$ уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} + \left[gV(r) + E - \frac{\epsilon^2}{4r^2}\right]\phi = 0. \qquad (2)$$

Это есть просто двухмерное радиальное уравнение Шредингера для движения с угловым моментом $m = \epsilon/2$. Ограничиваясь случаем $E \leqslant 0$ перепишем уравнение (2) в интегральной форме

$$\phi(r) = -g\int_0^\infty dr'\, G_\epsilon(r, r'; \kappa)\, V(r')\,\phi(r'), \qquad (3)$$

где $\kappa = \sqrt{-E}$, а функция Грина имеет вид

$$G_\epsilon(r, r'; \kappa) = -r' I_{\epsilon/2}(\kappa r_<) K_{\epsilon/2}(\kappa r_>),$$

где $r_>(r_<)$ обозначает бо́льшее (меньшее) из r, r' (определение модифицированных функций Бесселя $I_{\epsilon/2}$ и $K_{\epsilon/2}$ соответствует [3]). Поскольку нас интересует пороговое значение константы связи g_c, соответствующее связанному состоянию с нулевой энергией, необходимо перейти в уравнении (3) к пределу $\kappa \to 0$. В результате получаем уравнение

$$\phi(r) = \frac{g_c(\epsilon)}{\epsilon}\int_0^\infty dr' r' \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\epsilon/2} V(r')\,\phi(r'), \qquad (4)$$

которое служит для определения $g_c(\epsilon)$. В пределе малых ϵ оно принимает особенно простой вид

$$\phi(r) = \frac{g_c(\epsilon)}{\epsilon}\int_0^\infty dr' r' V(r')\,\phi(r')$$

и имеет в этом случае очевидное решение $\phi(r) = \mathrm{const}$. Тогда мы сразу получаем, что при $\epsilon \to 0$

$$g_c(\epsilon) \cong \epsilon\left[\int_0^\infty dr\, r\, V(r)\right]^{-1}. \qquad (5)$$

Отметим, что при $\epsilon = 1$ значение g_c, даваемое формулой (5), совпадает (если $V(r) \geqslant 0$ для всех r) с оценкой g_c, которую можно получить исходя из неравенства Баргмана для s-состояния:

$$n_0 \leqslant g\int_0^\infty dr\, r\, |V(r)|,$$

где n_0 есть число связанных состояний с нулевым моментом.

Основываясь на уравнении (4) нетрудно построить регулярную теорию возмущений по ϵ для $\phi(r)$ и $g_c(\epsilon)$, и улучшить таким образом оценку, основанную на неравенстве Баргмана. Выражение для $g_c(\epsilon)$ с учетом второго члена ϵ-разложения имеет вид

$$g_c(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\int\limits_0^\infty dr\, r V(r)} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\int\limits_0^\infty dr\, r \int\limits_0^\infty dr' r' V(r) V(r') \ln \frac{r_>}{r_<}}{\left[\int\limits_0^\infty dr\, r\, V(r)\right]^3} + \ldots \quad (6)$$

Входящие в эту формулу интегралы легко вычисляются для широкого класса потенциалов. Результаты таких вычислений и основанные на них оценки для пороговых значений констант связи приведены (для четырех наиболее простых потенциалов) в таблице. В последнем столбце таблицы приводятся точные значения g_c (полученные либо из аналитического решения уравнения Шредингера, либо численными методами).

$V(r)$	$g_c(\epsilon)a^2$ из (6)	$g_c a^2$ из (6) при $\epsilon = 1$	Точные значения $g_c a^2$
$a^4/(r^2+a^2)^2$	$2\epsilon + \epsilon^2$ [2]	3	3
$\theta(a-r)$	$2\epsilon + \epsilon^2/2$	2,5	2,464...
$\frac{a}{r} e^{-r/a}$	$\epsilon + \epsilon^2 \ln 2$	1,6931...	1,6798...
$e^{-r/a}$	$\epsilon + \epsilon^2(\ln 2 - 1/4)$	1,4431 ...	1,4457 ...

Нельзя не отметить хорошего согласия результатов, полученных с помощью формулы (6) и точных значений g_c. Таким образом, формула (6) может, по-видимому, рассматриваться при $\epsilon = 1$ как самостоятельная оценка для g_c [3]. Чтобы оценить ее точность (или улучшить ее) нужно конечно вычислить следующий член ряда ϵ-разложения. Общее выражение для него оказывается однако слишком громоздким и мы его здесь не приводим.

Структура ряда по степеням ϵ зависит, несомненно, от вида конкретного потенциала [4] однако некоторые ее особенности можно, на наш взгляд понять на примере точно решаемой (при любом ϵ) задачи о прямоугольной потенциальной яме, $V(r) = \theta(a-r)$. В этом случае величина $g_c(\epsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$J_{\epsilon/2-1}\left(\sqrt{g_c(\epsilon)}\,a\right) = 0,$$

а ряд ϵ-разложения имеет вид

$$g_c(\epsilon)a^2 = 2\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{24}\epsilon^3 + \frac{7}{576}\epsilon^4 - \frac{293}{69020}\epsilon^5 + \ldots \quad (7)$$

---

2) Можно, показать, что это точный результат, справедливый при всех ϵ.

3) Отметим, что для потенциалов, приведенных в таблице, формула (6) дает лучшие значения g_c, чем критерий, недавно полученный в работе [4]

4) Ряд может содержать конечное число членов (как например для первого потенциала в таблице), но вообще говоря, для произвольного потенциала ряд может оказаться асимптотическим.

Из этой формулы видно, что начиная с третьего члена ряд, во-первых становится знакопеременным, а во-вторых его коэффициенты быстро убывают (уравнение (4) наводит на мысль, что истинным параметром разложения является скорее $\epsilon/2$, а не просто ϵ). Оба эти обстоятельства приводят к тому, что уже два первых члена ряда (7) дают хорошее приближение для g_c.

В заключение отметим, что было бы интересно обобщить предлагаемый метод на случай системы из трех тел, однако пока этого не удалось сделать.

Автор выражает благодарность Д.А.Киржницу за полезные обсуждения в ходе работы.

Литература

1. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1975, **59B**, 79.

2. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980.

3. Справочник по специальным функциям, М.: Наука, 1979.

4. *Rosen G.* Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, 1885.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
25 мая 1983 г.