

КВАНТОВАННЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА, СВЯЗАННЫЙ С ВОЛНАМИ ЗАРЯДОВОЙ ПЛОТНОСТИ

Ю.А.Бычков, Э.И.Раиба

Построена теория квантованной холловской проводимости σ_H с учетом межэлектронного взаимодействия через волны зарядовой плотности (ВЗП). σ_H растет линейно с ростом степени заполнения ν за исключением рациональных точек $\nu = r/p$ с небольшими p , где в спектре возникает щель, а σ_H обнаруживает особенность, становясь кратным e^2/h .

Открытие квантования холловской проводимости (КХП) σ_H в двумерных (2D) проводниках породило интересные проблемы и привлекло внимание к этой области. Фон Клитцингом и др.¹ было открыто целочисленное КХП $\sigma_H = \sigma_{yx} = \nu e^2/h$ где $\nu = N$ – целое число, равное количеству заполненных уровней Ландау (N включает и спиновый индекс). Цуй и др.² обнаружили дробное КХП с $\nu = 1/3, 2/3$, а Стормер и др.³ – с $\nu = r/p, p = 3, 5, 7$. Дробные ν отвечают частичному заполнению верхнего уровня Ландау. Во всех случаях КХП обнаруживается в виде плато на кривых сопротивления ρ_{xy} , по высоте равных $h/e^2\nu$, и глубоких провалов на кривых ρ_{xx} . При этом $\rho_{xx} \ll \rho_{xy}$ и $\sigma_{yx} \approx (\rho_{xy})^{-1}$.

Механизм целочисленного КХП уже интерпретирован в его основных чертах. Механизм дробного КХП остается загадочным. Единственный тезис, который является общепризнанным, состоит в том, что причиной эффекта является межэлектронное ($e-e$) взаимодействие: только оно может создать в спектре щель, которая, как предполагается, проявится в $\sigma_H(\nu)$ в виде плато. Во всех трех известных нам работах по дробному КХП (Июшиока и др.⁴, Лафлин¹)⁵, Тао и Таулесс⁸) σ_H не вычисляется, а энергия определяется различными методами, выходящими за рамки метода Хартри – Фока (ХФ). Ввиду сложности задачи в этих работах делаются предположения, следствия которых трудно оценить. Мы вычисляем электронную энергию методом ХФ через самосогласованное поле ВЗП и находим $\sigma_H(\nu)$.

Возникновение ВЗП в 2D-системах при температурах $T_{ВЗП} \sim [e^2\nu(1-\nu)/\epsilon\lambda(B)]$, где ϵ – диэлектрическая постоянная, $\lambda(B) = (c\hbar/eB)^{1/2}$ – магнитная длина, B – магнитное поле, предсказали Фукуяма и др.⁹. Мы предполагаем, что ВЗП образуют двумерную решетку. Для упрощения формул считаем элементарную ячейку прямоугольной с ребрами a и b . Решетка ВЗП и магнитная решетка (с площадью ячейки $2\pi\lambda^2$) должны быть соизмеримы:

$$ab = \frac{p}{q} 2\pi\lambda^2(B), \tag{1}$$

p и q – целые взаимно простые числа. Будем считать поле B сильным: $\hbar\omega_c \gg e^2/\epsilon\lambda$, где $\omega_c = eB/m^*c$ – циклотронная частота. Тогда потенциал ВЗП, имеющий порядок $e^2/\epsilon\lambda$, может рассматриваться по сравнению с $\hbar\omega_c$ как возмущение. Поэтому волновые функции $\psi_{knN}(\mathbf{r})$, согласованные с симметрией магнитной решетки, могут строиться как линейные комбинации функций $\psi_{p_yN}(\mathbf{r})$, выбранных в калибровке Ландау, с одним значением N :

$$\psi_{kn}(\mathbf{r}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left\{i \frac{2\pi}{b} (n+lp)(y + \lambda^2 k_x)\right\} \psi_{k_y} \left(x - \lambda^2 k_y - \frac{2\pi\lambda^2}{b} (n+lp)\right) \tag{2}$$

(индекс N опущен). Новые квантовые числа k и n определены соотношениями

$$p_y = k_y + (n+lp)Q_{y0}, \quad 0 \leq n < p, \tag{3}$$

$$0 \leq k_x \leq Q_{x0}/q = 2\pi/qa, \quad 0 \leq k_y \leq Q_{y0} = 2\pi/b.$$

¹) В⁵ используется классификация уровней конечных электронных кластеров, разработанная в^{6,7}.

Итак, существует p функций $\psi_{k_n}(\mathbf{r})$, определенных в новой бриллюэновской зоне (3);

$\psi_{k, n+p} = \psi_{k_n}$. Собственные функции $\psi_{k\alpha}(\mathbf{r})$ имеют вид:

$$\psi_{k\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_n C_{\alpha n}(\mathbf{k}) \psi_{k_n}(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Для них условие периодичности по \mathbf{k} имеет вид $\psi_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}, \alpha}(\mathbf{r}) = \psi_{k\alpha}(\mathbf{r}) \exp\{i\theta_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{Q})\}$.

В приближении ХФ все $C_{\alpha n}$ связаны следующей системой уравнений, определяющей p ветвей спектра (мини-зон), на которые расщепляется каждый уровень Ландау:

$$E_k C_{\alpha n}(\mathbf{k}) = \sum_{Q_x} \sum_{n'=0}^{p-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} U(Q)g(\mathbf{Q}) \exp\left\{-ik_x \frac{2\pi\lambda^2}{b} (n' + lp)\right\} \times \\ \times \exp\left\{iQ_x k_y \lambda^2 + iQ_x \frac{2\pi\lambda^2}{b} \left(n - \frac{n'}{2} - \frac{l}{2}p\right)\right\} C_{\alpha, n-n'}(\mathbf{k}). \quad (5)$$

Здесь E_k — энергия,

$$U(Q) = \frac{1}{2\pi} V(Q) w_N^2(Q^2) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\lambda^2 \mathbf{k} \mathbf{Q}} V(k) w_N^2(k^2) \quad (6)$$

— потенциал ХФ, $V(k)$ — фурье-компонента потенциала $V(r)$ эффективного e - e -взаимодействия (которое различно для разных $2D$ -систем), а $w_N(k^2) = L_N(z)e^{-z/2}$, $z = \lambda^2 k^2/2$, а L_N — полиномы Лагерра. Функция $g(\mathbf{Q})$ связана с распределением электронной плотности и определяется из условия самосогласования. Оно получается, если записать выражение для распределения электронной плотности через оператор $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{k\alpha} \psi_{k\alpha}(\mathbf{r}) \hat{A}_{k\alpha}$:

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_Q w_N(Q^2) g(\mathbf{Q}) \exp(i\mathbf{Q}\mathbf{r}) = \\ = \sum_{\alpha, n} \sum_Q \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \exp\left\{-i\lambda^2 \left(\frac{Q_x Q_y}{2} + k_y Q_x\right) - i\theta_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) + i\mathbf{Q}\mathbf{r}\right\} \times \\ \times f(E_{k\alpha}) w_N(Q^2) C_{\alpha n}(\mathbf{k}) C_{\alpha n}^*(\mathbf{k} + \mathbf{Q}), \quad (7)$$

$f(E)$ — функция Ферми. Уравнение (7) замыкает систему и позволяет найти полную энергию $E = E(\nu, p, q)$. Ее минимум по p и q при $\nu = \text{const}$ определит $p = p(\nu)$ и $E = E(\nu)$ (естественно предположить, что $q_{min} = 1$; примем это допущение). Существенно, что ν выше рассматривалась как независимый параметр, который мог влиять на размер ВЗП только через p_{min} . При этом на ячейку приходится произвольное (иррациональное) число электронов. Это естественно, так как решетка ВЗП — квантовая (в отличие от классического вигнеровского кристалла). Если $\nu \rightarrow r/p$ (r — целое), то ячейка в \mathbf{k} -пространстве уменьшается. Одновременно в ней открываются новые мини-щели и число мини-зон возрастает до p . При $\nu = r/p$, r из них целиком заполнены. При этом в энергии $E(\nu)$ должна быть особенность — местный минимум. Именно при таких ν в ^{2,3} обнаружены особенности — плато.

Нам представляется, что метод ХФ способен интерпретировать ряд черт дробной КХП. Мнение о его полной неприменимости сложилось в литературе на основании расчетов ^{10,11}, не обнаруживших на кривой $E(\nu)$ особенности при $\nu = 1/3$. Однако в ^{10,11} $E(\nu)$ вычислялось с переменным размером ячейки ВЗП, слишком жестко связанным с ν .

Проводимость σ_H вычислим в одночастичном приближении, т. е. будем считать решетку ВЗП неподвижной вследствие пиннинга и исключим вклад соответствующей коллективной

²⁾ А в общем случае и по форме ячейки.

моды. Но "в малом" будем считать решетку подвижной, т. е. способной перестраиваться при изменении ν . При расчетах воспользуемся изящной работой Таулесса и др.¹² Из формулы Кубо следует:

$$\sigma_H = - \frac{e^2}{\hbar} \lambda^2 \sum_{\alpha} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} f(E_{\mathbf{k}\alpha}) (\text{rot}_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\alpha}(\mathbf{k}))_z, \quad (8)$$

где

$$(\mathbf{A}_{\alpha}(\mathbf{k}))_j = \frac{i}{2} \int d^2 r \left(u_{\mathbf{k}\alpha}^* \frac{\partial u_{\mathbf{k}\alpha}}{\partial k_j} - u_{\mathbf{k}\alpha} \frac{\partial u_{\mathbf{k}\alpha}^*}{\partial k_j} \right). \quad (9)$$

В (8) и (9) интегрирование ограничено ячейкой прямой и взаимной решетки ВЗП, а $u_{\mathbf{k}\alpha} = \psi_{\mathbf{k}\alpha} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Используя (2) и (4), получаем

$$(\mathbf{A}_{\alpha}(\mathbf{k}))_j = k_y \delta_{jx} + \frac{i}{2} \sum_n \left\{ C_{\alpha n}^* \frac{\partial C_{\alpha n}}{\partial k_j} - C_{\alpha n} \frac{\partial C_{\alpha n}^*}{\partial k_j} \right\}. \quad (10)$$

Пусть сначала ν не приближается к какому-либо числу r/p с небольшим p , а $\nu(1-\nu)$ не слишком мало. Тогда обе ячейки, — магнитная и ВЗП, — совпадают, $p = q = 1$ и имеется единственный коэффициент $C_{11} = 1$. Тогда в (10) сохраняется только первый член и

$$\sigma_H = (e^2/h)\nu. \quad (11)$$

Этот результат нетривиален, так как электроны движутся в поле ВЗП. Если $\nu(1-\nu)$ мало, так что $T_{\text{ВЗП}}(\nu) < T$, то (10) также справедливо.

Если $\nu = r/p$ с небольшим p , то решетка ВЗП перестраивается и ее бриллюэновская зона уменьшается в p раз. При этом все коэффициенты $C_{\alpha n}$ имеют сравнимую величину. В¹² показано, что в таких точках

$$\sigma_H = (e^2/h)s, \quad (12)$$

где $s(p, \alpha)$ — положительное или отрицательное целое число, которое зависит от конкретной модели. Но если $\nu = m$ (m — целое), то $\sigma_H = (e^2/h)m$, что согласуется и с (11).

Из сказанного ясно, что возможна также перестройка ВЗП с изменением p , которая происходит при $\nu \neq r/p$.

Основные выводы таковы. Вдали от точек r/p (с малыми p), а также при малых $\nu(1-\nu)$ проводимость σ_H следует "классическому" закону (11). При $\nu = m$ $\sigma_H(\nu)$ также непрерывна (плато образуется за счет постороннего механизма — "резервуара"¹³). При $\nu = r/p$ приближение ХФ приводит к открыванию щелей в спектре и к особенностям в $\sigma_H(\nu)$ — значительным выбросам до целочисленного значения $\sigma_H = (e^2/h)s$, положительного или отрицательного. Сейчас неясно, возникают ли эти выбросы вследствие дефектов метода ХФ, дающего одночастичное описание транспортных явлений, или они являются реальным эффектом, который пока не удалось наблюдать из-за несовершенства образцов. Здесь решающую роль может играть частичный пиннинг решетки ВЗП, сохраняющий локальную подвижность, достаточную для местной перестройки ВЗП и образования щелей, но нарушающий дальнюю корреляцию (к которой форм. (12) может оказаться более чувствительной) и создающий механизм диссипации. Как изменится внешнее проявление описанных выше особенностей в условиях мозаичной структуры ВЗП, возникающей вследствие пиннинга, пока остается неясным.

Литература

1. von Klitzing K., Dorda G., Pepper M. Phys. Rev. Lett., 1980, 45, 494.
2. Tsui D.C., Stormer H.L., Gossard A.C. Phys. Rev. Lett., 1982, 48, 1559.
3. Stormer H.L., Chang A., Tsui D.C., Hwang J.C.M., Gossard A.C., Wiegman W. Phys. Rev. Lett., 1983, 50, 1953.
4. Yoshioka D., Halperin B.I., Lee P.A. Phys. Rev. Lett., 1983, 50, 1219.
5. Laughlin R.B. Phys. Rev. Lett., 1983, 50, 1395.

6. Бычков Ю.А., Иорданский С.В., Элиашберг Г.М. Письма в ЖЭТФ, 1981, 33, 132; Поверхность, 1982, №10, 33.
7. Laughlin R.B. Phys. Rev., 1983, B 27, 3383.
8. Tao R., Thouless D.J. Preprint (University of Washington), 1983,
9. Fukuyama H., Platzman P.M., Anderson P.W. Phys. Rev., 1979, B19, 5211.
10. Yoshioka D., Fukuyama H. J. Phys. Soc. Japan, 1979, 47, 394.
11. Yoshioka D., Lee P. Phys. Rev., 1983, B27, 4986.
12. Thouless D.J., Kohmoto M., Nightingale M.P., den Nijs M. Phys. Rev. Lett., 1982, 49, 405.
13. Barraf G.A., Tsui D.C. Phys. Rev., 1981, B24, 2274.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18 июля 1983г.