Письма в ЖЭТФ, том 34, вып.2, стр. 60 – 64　　　　　　　　*20 июля 1981 г.*

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В СТОХАСТИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД.

В.А.Рожанский

Получена оценка для потока энергии поперек магнитных поверхностей, разрушенных из-за "дрожания" силовых линий магнитного поля. Показано, что электронная теплопроводность в токамаках дается формулой Окавы.

Перенос тепла поперек магнитных поверхностей, разрушенных из-за "дрожания" силовых линий, интенсивно изучался в последнее время, см., например, [1 – 3]. Коэффициент температуропроводности электронов $\chi_\perp$ связывался в этих работах со спектром флуктуаций магнитного поля B_k. Между тем уровень флуктуаций B_k определяется нелинейным насыщением колебаний плазмы, так что задача должна решаться самосогласованно. В данной работе предполагается, что турбулентность магнитного поля обусловлена раскачкой электронной температурной дрейфовой неустойчивости [4], и найдена связь соответствующего потока тепла с параметрами плазмы.

Рассмотрим для простоты задачу в плоской геометрии:

$$\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z + B_y(x)\,\mathbf{e}_y + \delta\mathbf{B}; \quad B_y/B_z = \theta \ll 1, \tag{1}$$

$$\delta B_x = \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}x} = \sum_{\mathbf{k}} B^{(0)}_{\mathbf{k}x} \exp\left(ik_z z + ik_y y - i\omega t\right).$$

Резонансным магнитным поверхностям соответствует

$$k_{\parallel}(x) = (k_z B_z + k_y B_y)/B \to 0. \tag{2}$$

Система гидродинамических уравнений для электронов при $\lambda_e \lesssim k_{\parallel}^{-1}$, где λ_e – длина пробега электронов, имеет вид

$$-i(\omega - k_y v_0)\, n_{\mathbf{k}} + ik_{\parallel} v_{e\parallel\mathbf{k}} - ik_y \phi_{\mathbf{k}} \frac{c}{B}\frac{dn_0}{dx} = 0 \tag{3}$$

$$i(\omega - k_y v_0)\, m_e v_{e\parallel\mathbf{k}} - ik_{\parallel} T_{e0} n_{\mathbf{k}} - 1{,}71\, ik_{\parallel} n_0 T_{e\mathbf{k}} +$$

$$+ ik_{\parallel} e n_0 \phi_{\mathbf{k}} - 0{,}51\, m_e \nu_{ei} n_0 v_{e\parallel\mathbf{k}} -$$

$$- \frac{B_{\mathbf{k}x}}{B}\left(T_{e0}\frac{dn_0}{dx} + 1{,}71\, n_0 \frac{dT_{e0}}{dx} - e n_0 \frac{d\phi_0}{dx}\right), \tag{4}$$

$$-{}^3/_2\, i(\omega - k_y v_0)\, T_{e\mathbf{k}} - {}^3/_2\, ik_y \frac{c}{B}\phi_{\mathbf{k}} \frac{dT_{e0}}{dx} + 1{,}71\, ik_{\parallel} T_{e0} v_{e\parallel\mathbf{k}} +$$

$$+ {}^3/_2\, k_{\parallel}^2 \chi_{e\parallel} T_{e\mathbf{k}} - {}^3/_2\, ik_{\parallel} \chi_{e\parallel} \frac{dT_{e0}}{dx}\frac{B_{\mathbf{k}x}}{B} = 0, \tag{5}$$

где $v_0 = \dfrac{c}{B}\dfrac{d\phi_0}{dx}$, ϕ_0 – невозмущенное электрическое поле. Для колебаний с поперечной компонентой длины волны меньшей, чем ионный ларморовский радиус, ионы распределены по Больцману

$$\phi_k = -\frac{T_{i0}}{e}\frac{n_{\mathbf{k}}}{n_0}. \tag{6}$$

Электронный продольный ток связан с возмущением магнитного поля

$$\frac{4\pi}{c} e n_0 v_{e\parallel\mathbf{k}} = ik_y B_{\mathbf{k}x}. \tag{7}$$

Пренебрегая в системе (3 – 7) затуханием (члены ${}^3/_2\, \chi_{e\parallel} k_{\parallel}^2 T_{e\mathbf{k}}$, $0{,}51 m_e \nu_{ei} n_0 v_{e\parallel\mathbf{k}}$), а также членами, содержащими $B_{\mathbf{k}x}/B$, найдем при $\eta = d\ln T_{eo}/d\ln n_o >> 1$ $\omega^3 = -1{,}71\, k_y u_{Te} k_\parallel^2 T_{io}/m_e$, где $u_{Te} = -(c\, dT_{eo}/dx)/eB$. В дальнейшем при оценках будем полагать $\lambda_e \sim k_\parallel^{-1}$. Затухание становится существенным при $k_\parallel v_{Te} \sim \omega_d = k_y u_{Te}$ (где $v_{Te} = (2T_{eo}/m_e)^{1/2}$). Таким образом, колебания локализованы вблизи резонансных магнитных поверхностей с характерной областью локализации Δx [4]

$$\Delta x \sim \frac{a}{\theta} \frac{k_\parallel}{k_y} \sim \frac{\rho_{ce}}{\theta}, \tag{8}$$

где ρ_{ce} – электронный ларморовский радиус, a – характерный масштаб в направлении x. Пренебрежение членами, содержащими $B_{\mathbf{k}x}/B$, оправдано при $k_y^{-1} < c/\omega_{pe}$ (ω_{pe} – плазменная частота электронов), т.е. поперечная компонента длины волны не превосходит размер скин-слоя. Это же условие позволяет пренебречь вихревым электрическим полем $E_y \sim \omega B_{kx}/k_z c$ по сравнению с потенциальным $-k_y \phi_{\mathbf{k}}$. Для наибольших длин волн с k_y^{-1} порядка Δx получим отсюда неравенство

$$\beta = \frac{n_o(T_{eo} + T_{io})8\pi}{B^2} < \theta^2. \tag{9}$$

Данное условие выполняется обычно в современных токамаках. При этом справедливо также соотношение $\theta > (m_e/m_i)^{1/2}$, так что поперечная компонента длины волны действительно не превосходит ионный ларморовский радиус.

Рассмотрим следующий механизм насыщения неустойчивости. Если число мод m велико, то в область шириной $\sim \Delta x$ попадает много мод. Магнитные поля всех мод складываются, образуя суммарное магнитное поле δB_x (1), которое приводит к блужданию силовой линии по x. Если на характерной длине $k_\parallel^{-1}$ силовая линия отклоняется на расстояние превышающее Δx, то моды стабилизируются. Отсюда имеем оценку

$$\sum_{\mathbf{k}} \left| \frac{B_{\mathbf{k}x}}{B} \right|^2 \sim (k_\parallel \Delta x)^2 \sim \left(\frac{k_\parallel}{k_y}\right)^2 \sim \left(\frac{\rho_{ce}}{a}\right)^2. \tag{10}$$

При этом уровень флуктуаций $n_{\mathbf{k}}/n_o \sim c^2\theta(\omega_{pe}^2 \rho_{ce} a\sqrt{m})^{-1}$ оказывается ниже, чем уровень $n_{\mathbf{k}}/n_o \sim (a k_y)^{-1} \sim \rho_{ce}/a\theta$, при котором становится существенным нелинейное взаимодействие мод из-за раскачки мелкомасштабных колебаний на градиенте крупномасштабных. Критерием является условие

$$\beta > \theta^2/\sqrt{m} \sim (\rho_{ce}/a\theta)^{1/2}\theta^2. \tag{11}$$

Для оценки электронного потока тепла воспользуемся линейными уравнениями (3 – 7). Учет нелинейного взаимодействия между модами через суммарное магнитное поле, обращающее в ноль инкремент колебаний, не изменяет по порядку величины тепловой поток, обусловленный наличием теплопроводности вдоль магнитного поля. Поток тепла дается выражением

$$q = -\,{}^{3}\!/_{2}\, n_o \chi_{e\parallel} \left\langle \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \left(ik_\parallel T_{e\mathbf{k}} \frac{B_{\mathbf{k}x}}{B} + \frac{dT_{eo}}{dx} \frac{B_{\mathbf{k}x} B_{\mathbf{k}'x}}{B^2} \right) \right\rangle . \tag{12}$$

Выражая $T_{e\mathbf{k}}$ через $n_\mathbf{k}$ и $v_{e\parallel\mathbf{k}}$ с помощью (5), $n_\mathbf{k}$ через $v_{e\parallel\mathbf{k}}$ согласно (3, 6), используя уравнение Максвелла (7) и подставляя значение $T_{e\mathbf{k}}$ в (12), получим

$$q = -n_o \chi_{e\parallel} \left\langle \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \left\{ \frac{ik_\parallel^2 k_y c B T_{eo}\left(1{,}71 - \frac{T_{io}}{T_{eo}} \frac{k_y u_{Te}}{\omega - k_y v_o}\right)}{4\pi e n_o \left[i(\omega - k_y v_o) - k_\parallel^2 \chi_{e\parallel}\right]} \frac{B_{\mathbf{k}x} B_{\mathbf{k}'x}}{B^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \,{}^{3}\!/_{2} \frac{dT_{eo}}{dx} \frac{B_{\mathbf{k}x} B_{\mathbf{k}'x}}{B^2} \right\} \right\rangle . \tag{13}$$

Переходя к бесстолкновительному случаю, т.е. заменяя λ_e на $k_\parallel^{-1}$, полагая $\omega \sim \omega_d = k_y u_{Te} \sim k_\parallel v_{Te}$, $k_y^{-1} \sim \Delta x$ получим для эффективной поперечной электронной температуропроводности $\chi_\perp$ оценку

$$\chi_\perp \sim \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{k_y c B a}{4\pi e n_o} + \frac{v_{Te}}{k_\parallel} \right) \left| \frac{B_{\mathbf{k}x}}{B} \right|^2 . \tag{14}$$

Второй член в этом выражении соответствует результату [1] с заменой $\delta(k_\parallel)$ на $k_\parallel^{-1}$ ($k_\parallel \lesssim k_y u_{Te} / v_{Te}$). Однако нетрудно видеть, что при условии (9) главным является первый член, который в θ^2/β раз превосходит второй. Подставляя в (14) оценку (10), найдем связь $\chi_\perp$ с параметрами плазмы

$$\chi_\perp \sim \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_{Te}\,\theta}{a} . \tag{15}$$

Данное выражение было предложено Окавой [5] для объяснения эмпирической зависимости энергетического времени жизни в токамаках от концентрации плазмы.

Таким образом, при условии $\beta < \theta^2$, характерный масштаб колебаний определяется величиной $\sim \rho_{ce}/\theta$, характерная частота $\omega \sim \omega_d$, характерная длина волны вдоль магнитного поля (длина корреляции флуктуаций δB_x) $\lambda_\parallel \sim a/\theta$, а коэффициент температуропроводности электронов дается формулой (15).

В обратном случае $\beta > \theta^2$ ($\rho_{ce}/\theta > c/\omega_{pe}$) характерный масштаб колебаний определяется размером бесстолкновительного скин-слоя c/ω_{pe}. В этом случае $\omega \sim \omega_d$, $\lambda_\parallel \sim (a/\theta)(\theta/\sqrt{\beta}) < a/\theta$, а уровень насыщения по-прежнему определяется согласно (10). Первый и второй члены в (14) становятся одного порядка, а значение $\chi_\perp$ дается оценкой:

$$\chi_\perp \sim \left(\frac{c}{\omega_{pe}}\right) \frac{c\,T_{eo}}{eBa} . \tag{16}$$

Предложенная модель существенно отличается от рассмотрения [6, 7], где предполагалось $k_y^{-1} \sim c/\omega_{pe}$, $k_{\parallel}^{-1} \sim a/\theta$, $\omega \sim v_{Te}\,\theta/a$.

Ленинградский
политехнический институт
им. М.И.Калинина

Поступила в редакцию
28 апреля 1981 г.

Литература

[1] A.B.Rochester, M.N.Rosenbluth. Phys. Rev. Lett., 40, 38, 1978.

[2] B.B.Kadomtsev, O.P.Pogutse. IAEA-CN-37/O-1, 1, 649, 1979.

[3] А.А.Галеев, Л.М.Зеленый. Письма в ЖЭТФ, 29, 669, 1979.

[4] Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце. Сб. Вопросы теории плазмы, вып.5, М., Атомиздат, 1967, стр.209.

[5] T.A. Ohkawa. Phys. Lett., 67A, №1, 35, 1978.

[6] V.V.Parail, O.P.Pogutse. IAEA-CN-38/с-1, 1980.

[7] В.В.Параил, О.П.Погуце. Письма в ЖЭТФ, 32, 408, 1980.