Письма в ЖЭТФ, том 34, вып.2, стр. 64 – 67 *20 июля 1981 г.*

О НОВОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

А.И.Ломтев

Для границы раздела двух нелинейных одноосных сред "+" и "–" (соответственно $z > 0$ и $z < 0$), характеризуемых диагональными тензорами диэлектрических проницаемостей $\epsilon^{\pm}_{ij}(\omega, |E^{\pm}|^2)$, квадратично зависящими от амплитуды электрического поля, получены точные решения уравнений Максвелла вида нелинейных поверхностных волн P-типа.

Рассмотрим возможность существования поверхностных мод на границе раздела двух нелинейных сред, занимающих соответственно полупространства $z > 0$ и $z < 0$. Для упрощения расчетов ограничимся рассмотрением кристаллов одноосной симметрии, при которой тензоры диэлектрических проницаемостей (ДП) диагональны, однако, обладают сильной нелинейностью по амплитуде электрического поля

$$\epsilon^{\pm}_{11} = \epsilon^{\pm}_{22} = \epsilon^{o}_{\pm}(\omega) + a_{\pm}(\omega)[|E^{\pm}_{1}|^2 + |E^{\pm}_{2}|^2]; \; \epsilon^{\pm}_{33} = \epsilon_{\pm}(\omega).$$

Простейшими физическими механизмами, приводящими к такой нелинейности, являются оптический эффект Керра, электрострикция, иониза-

ция среды полем волны и т.д., когда учет первого неисчезающего члена разложения нелинейной части поляризации по степеням амплитуды поля приводит к нелинейным процессам на основной частоте.

Уравнения Максвелла справедливы в обоих полупространствах, включая и границу раздела, и на классе квазимонохроматических волн [1]

$$E^{\pm}_{1,3}(x, z, t) = \mathcal{E}^{\pm}_{1,3}(z, t)\exp\{i(qx - \omega t)\};\ E^{\pm}_{2}(x, z, t) = 0,$$

$$H^{\pm}_{2}(x, z, t) = H^{\pm}(z, t)\exp\{i(qx - \omega t)\};\ H^{\pm}_{1,3}(x, z, t) = 0 \tag{1}$$

имеют следующий вид

$$\frac{\partial H^{\pm}}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}D^{\pm}_{1};\ qH^{\pm} = -\frac{\omega}{c}D^{\pm}_{3};\ \frac{\partial \mathcal{E}^{\pm}_{1}}{\partial z} - iq\mathcal{E}^{\pm}_{3} = i\frac{\omega}{c}H^{\pm};\ \mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}. \tag{2}$$

Предполагается, что для волны, распространяющейся вдоль оси x, все амплитуды $\mathcal{E}^{\pm}_{1,3}$, $H^{\pm}$ медленно изменяются со временем t по сравнению с фазовым множителем $\exp\{-i\omega t\}$, то есть, физические процессы, приводящие к нелинейности, протекают достаточно быстро за время характерного изменения амплитуд поля. Путем исключения из системы уравнений (2) величин $\mathcal{E}^{\pm}_{3}(z, t)$ и $H^{\pm}(z, t)$, относительно амплитуд $\mathcal{E}^{\pm}_{1}(z, t)$ получаем уравнения

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2_{\pm}\epsilon^{\pm}_{11}/\epsilon_{\pm}\right]\mathcal{E}^{\pm}_{1} = 0, \tag{3}$$

которые обладают первыми "интегралами энергии"

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{E}^{\pm}_{1}}{\partial z}\right)^2 - \frac{k^2_{\pm}}{2\epsilon_{\pm}}\left(\epsilon^{\circ}_{\pm}\mathcal{E}^{\pm\,2}_{1} + a_{\pm}\mathcal{E}^{\pm\,4}_{1}/2\right) = C_{\pm}, \tag{4}$$

где $k^2_{\pm} = q^2 - \omega^2\epsilon_{\pm}/c^2$, а константы $C_{\pm} = 0$ в силу того, что искомые решения должны обращаться в нуль на бесконечности ($\pm\infty$). Это обстоятельство позволяет найти простые решения уравнений (4)

$$\mathcal{E}^{\pm}_{1}(z) = (-2\epsilon^{\circ}_{\pm}/a_{\pm})^{1/2}\,\mathrm{ch}^{-1}\left[(\epsilon^{\circ}_{\pm}/\epsilon_{\pm})^{1/2}k_{\pm}(z - z^{\circ}_{\pm})\right], \tag{5}$$

удовлетворяющие и исходным уравнениям (3). Неизвестные параметры $z^{\circ}_{\pm}$, определяющие начальные "фазы" по z координате, выражаются через граничное значение тангенциальной составляющей напряженности электрического поля согласно граничному условию ее непрерывности на

границе при $z = 0$

$$\left(-\frac{2\epsilon^{o}}{a_{-}}\right)^{1/2} \mathrm{ch}^{-1}\left[\left(\frac{\epsilon^{o}_{-}}{\epsilon_{-}}\right)^{1/2} k_{-} z^{o}_{-}\right] =$$

$$= \mathcal{E}_1(0) = \left(-\frac{2\epsilon^{o}_{+}}{a_{+}}\right)^{1/2} \mathrm{ch}^{-1}\left[\left(\frac{\epsilon^{o}_{+}}{\epsilon_{+}}\right)^{1/2} k_{+} z^{o}_{+}\right], \qquad (6)$$

которое одновременно и устанавливает связь между z^{o}_{+} и z^{o}_{-}.

Граничное условие непрерывности на границе раздела тангенциальной составляющей магнитного поля, которое согласно (2) имеет вид

$$H^{\pm}(z) = i(\omega/c k_{\pm})\, \partial\mathcal{E}^{\pm}_1(z)/\partial z, \qquad (7)$$

позволяет найти нелинейное дисперсионное уравнение поверхностных мод $\omega = \omega(q, \mathcal{E}_1(0))$

$$(\epsilon^{o}_{-}\epsilon_{-})^{1/2} k^{-1}_{-}\, \mathrm{th}\,[(\epsilon^{o}_{-}/\epsilon_{-})^{1/2} k_{-} z^{o}_{-}] = (\epsilon^{o}_{+}\epsilon_{+})^{1/2} k^{-1}_{+}\, \mathrm{th}\,[(\epsilon^{o}_{+}/\epsilon_{+})^{1/2} k_{+} z^{o}_{+}]. \qquad (8)$$

Отсюда в частности следует, что параметры z^{o}_{+} и z^{o}_{-} могут иметь лишь одинаковые знаки: $z^{o}_{+} z^{o}_{-} > 0$. Если они положительны, то согласно решениям (5) амплитуды $\mathcal{E}^{\pm}_1(z)$ вначале возрастают от значения $\mathcal{E}_1(0)$ до своих максимальных значений при $z = z^{o}_{\pm}$, а затем спадают до нуля на бесконечности. При отрицательных значениях $z^{o}_{\pm}$ амплитуды волн сразу же убывают от граничного значения $\mathcal{E}_1(0)$ до нуля при $z \to \pm\infty$.

С помощью соотношения (6) дисперсионное уравнение (8) может быть преобразовано в выражение для показателя преломления

$$n^2(\omega, \mathcal{E}_1(0)) = \left(\frac{qc}{\omega}\right)^2 = \frac{\epsilon_{+}\epsilon_{-}\,[\epsilon^{o}_{+} - \epsilon^{o}_{-} + (a_{+} - a_{-})\mathcal{E}^2_1(0)/2]}{\epsilon_{+}\epsilon^{o}_{+} - \epsilon_{-}\epsilon^{o}_{-} + (a_{+}\epsilon_{+} - a_{-}\epsilon_{-})\mathcal{E}^2_1(0)/2}, \qquad (9)$$

из требования вещественности которого $n^2(\omega, \mathcal{E}_1) > 0$ следуют ограничения на величину $\mathcal{E}_1(0)$ в виде системы неравенств

$$\begin{cases} (a_{+}\epsilon_{+} - a_{-}\epsilon_{-})\mathcal{E}^2_1(0) \lesseqgtr 2(\epsilon_{-}\epsilon^{o}_{-} - \epsilon_{+}\epsilon^{o}_{+}); \\ (a_{+} - a_{-})\mathcal{E}^2_1(0) \begin{Bmatrix} \lesseqgtr \\ \gtreqless \end{Bmatrix}, \; 2(\epsilon^{o}_{-} - \epsilon^{o}_{+}); \quad \epsilon_{+}\epsilon_{-} \begin{Bmatrix} \gtreqless \\ \lesseqgtr \end{Bmatrix}, \; 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Условия вещественности амплитуд решений (5) и нулевой ассимптотики их на бесконечности (по z координате) налагают определенные связи между знаками параметров среды: $a_{\pm}(\omega)\,\epsilon^{o}_{\pm}(\omega) < 0$ и $\epsilon^{o}_{\pm}(\omega)\epsilon_{\pm}(\omega) > 0$, согласно которым полученные нелинейные моды могут существовать в таких частотных областях, в которых линейные поверхностные волны не реализуются [2], например, при $a_{\pm}(\omega) < 0$; $\epsilon^{o}_{\pm}(\omega)$, $\epsilon_{\pm}(\omega) > 0$ либо $a_{\pm}(\omega) > 0$; $\epsilon^{o}_{\pm}(\omega)$, $\epsilon_{\pm}(\omega) < 0$. Следует также отметить, что для справедливости выбора ДП в указанном виде, необходимо обеспечить малость $\mathcal{E}^{\pm}_{max}(z^{o}_{\pm})$ по сравнению с внутрикристаллическими полями, то есть $(-2\epsilon^{o}_{\pm}/a_{\pm}) \lesssim 1$, что может быть осуществлено для малых $\epsilon^{o}_{\pm}(\omega)$ или больших $a_{\pm}(\omega)$. В противном случае следует использовать более общий вид материальных нелинейных соотношений.

Используя решения (5) и соотношения (6) и (8), легко осуществить предельный переход к случаю границы линейной и нелинейной сред, рассмотренному в работе [3], а также к решениям вида линейных поверхностных мод на границе раздела двух линейных сред [2]. Для этого, считая величину $\mathcal{E}_1(0)$ конечной, достаточно устремить один из коэффициентов $a_{\pm}$ (либо оба одновременно) к нулю. При этом, как следует из выражения (6), один из параметров $z^{o}_{\pm}$ (или оба одновременно) должны устремляться соответственно в $\pm\infty$. Как следствие этого, дисперсионное уравнение (8) будет трансформироваться либо в уравнение дисперсии нелинейных поверхностных поляритонов, либо в закон дисперсии линейных поверхностных волн. Амплитуды же волн (5) будут переходить в решения для нелинейных поляритонов или в экспоненциально спадающие от границы решения линейных поверхностных мод.

Более наглядно такие предельные переходы осуществляются в выражении (9) поочередным или одновременным устремлением $a_{\pm}$ к нулю.

В заключение отметим, что найденный класс точных решений нелинейных уравнений (3) не является единственно возможным, так как эти уравнения допускают и сепаратрисные решения типа уединенных волн, а также периодические (по оси x) решения [1, 4], анализ которых представляет самостоятельный интерес.

Считаю своим приятным долгом искренне поблагодарить А.А.Боргардта за внимание и полезные советы, а также участников семинаров Ю.М.Иванченко и К.Б.Толпыго за критические замечания.

Донецкий
физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
19 мая 1981 г.

Литература

[1] В.И.Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., изд. Наука, 1973, стр.34.

[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957, стр. 364.

[3] В.М.Агранович, В.С.Бабиченко, В.Я.Черняк. Письма в ЖЭТФ, 32, 532, 1980.

[4] Б.Б.Кадомцев. Коллективные явления в плазме. М., изд.Наука, 1976.