Письма в ЖЭТФ, том 36, вып. 2, стр. 24 – 26 20 июля 1982 г.

ПРАВИЛА КВАНТОВАНИЯ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВЫСОКОВОЗБУЖДЕННОГО АТОМА ВОДОРОДА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М.Ю.Сумецкий

Получены правила квантования и обнаружены зоны потери устойчивости высоковозбужденных сосредоточенных состояний атома водорода в сильном магнитном поле. Соответствующие дипольные матричные элементы переходов из основного состояния с изменением магнитного поля осциллируют, имея всплеск и минимум вблизи границ зон.

В последнее время особый интерес представляет исследование высоковозбужденных атомов в сильном магнитном поле таком, что величина поля сравнима или больше расстояния между уровнями (см. [1–4] и имеющиеся там ссылки). Для слабых (в классическом смысле) полей можно использовать классическую теорию возмущений [5,6]. Однако, с ростом магнитного поля эта теория теряет силу. Адиабатическое приближение, наоборот, накладывает чрезвычайно сильное ограничение на магнитное поле снизу и не учитывает существенные трехмерные особенности движения электрона в суперпозиции кулоновского и осцилляторного полей [4].

Будем рассматривать высоковозбужденные состояния электрона, сосредоточенные вблизи оси z, совпадающей с направлением магнитного поля B. Потенциал $V = -1/r + \gamma^2\rho^2/8$ ($\gamma = B/B_0$, $B_0 = 2{,}35 \cdot 10^5$ Тл) для z много бо́льших характерного поперечного размера ρ_0 связанного состояния разложим с точностью до квадратичных по ρ членов ($r = \sqrt{z^2+\rho^2}$). Уравнение Шредингера в этой области, после отделения азимутального фактора $\exp(im\phi)$ и введения временно́й переменной

$$\tau = \int^{z} \frac{dz}{p}, \quad p = \sqrt{\frac{2}{z} - \epsilon^2}, \qquad \epsilon^2 = \gamma m - 2E, \qquad m = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots$$

приводится к нестационарному уравнению Шредингера для гармонического осциллятора с переменной частотой, допускающего разделение переменных [7]. Вблизи центра атома водорода, на расстояниях меньших или порядка ρ_0, пренебрежем магнитным полем и потенциал будем считать чисто кулоновским. Для этого магнитное поле должно быть ограничено сверху неравенством (3). Затем полученные решения при $z \sim \rho_0$ сшиваем с линейными комбинациями кулоновских решений и находим собственные функции задачи (выражающиеся через суммы произведений полиномов Якоби и Лагерра от сложных аргументов и не приводящиеся здесь из-за громоздкости). Это, в частности, приводит к правилу квантования [6]

$$\int_0^{\epsilon^{-2}} p\,dz = \pi n + \frac{\mu}{2}(2k + |m| + 1), \quad n \gg 2k + |m| + 1, \qquad k \geqslant 0; \quad k, n - \text{целые}, \tag{1}$$

где μ — характеристический показатель линеаризованного по ρ дифференциального уравнения для классических траекторий $\rho(z)$, примыкающих к оси z:

$$u^2(1-u)^2(\rho\sqrt{p})_{uu} + \left[\frac{3}{16} + \kappa u^3(1-u)\right](\rho\sqrt{p}) = 0, \quad \kappa = \frac{\gamma^2}{\epsilon^6}, \quad u = \frac{\epsilon^2 z}{2}. \tag{2}$$

Если $\gamma = 0$, то $\mu = 0$, и из (1) получаем кулоновский спектр энергий. Далее будем считать $\gamma n^3 \gg 1$, тогда рассматриваемое в настоящей работе приближение справедливо при

$$\left(\frac{n}{2k + |m| + 1}\right)^{3/2} \gg \gamma n^3 \gg 1, \tag{3}$$

а также вне некоторой окрестности точек резонанса (см. ниже).

В области $\kappa u^3 \gg 1$ решаем уравнение (2) методом ВКБ, затем сшиваем полученные решения с решениями (2) вблизи центра, где магнитным полем можно пренебречь. В итоге (1) принимаем вид

$$\frac{\pi}{\epsilon} = \pi n + (2k + |m| + 1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\sqrt{\kappa}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\sqrt{\kappa}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}. \tag{4}$$

Фаза $\pi/3$ появляется в (4) благодаря кулоновской сердцевине потенциала. Из (4) видно, что характеристический показатель μ действителен в зонах

$$\gamma_{nq}^{-} < \gamma < \gamma_{nq}^{+}, \qquad \gamma_{nq}^{\pm} = \epsilon^3\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6} + q\right) \quad n, q \gg 1 - \text{целые}, \tag{5}$$

а вне этих зон сосредоточенное движение вблизи оси z становится неустойчивым в фазовом пространстве. Границы зон устойчивости соответствуют классическим резонансам и при $\mu = 0$ спектру энергий

$$E_{nmq}^{\pm} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{m}{2n^3}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6} + q\right), \tag{6}$$

совпадающим при $m = 0$ с кулоновским. Положим, например, $n = 100$, $q = 10, 11, 12, \ldots$. Тогда магнитное поле, соответствующее $\gamma_{100,\,q}^{+}$, пробегает значения 2,51; 2,74; 2,98; ... Тл.

При γ близких к $\gamma_{nq}^{\pm}$ волновые функции расплываются по ρ и используемый метод справедлив лишь при $\rho_0 \ll n^2$ или

$$|\gamma - \gamma_{nq}^{\pm}| \gg \frac{(2k + |m| + 1)^2}{\gamma^2 n^{11}}. \tag{7}$$

В то же время, значения магнитного поля $\gamma = \gamma_{nq}^{\pm}$ соответствуют $\mu = 0$, т. е. точкам псевдопересечения, которые, согласно, (4), являются просто пересечением. Правило квантования (4), как квазиклассическое, справедливо вне окрестностей точек псевдопересечения, определяемых оценкой $\mu \gg 1/n$ или

$$|\gamma - \gamma_{nq}^{\pm}|^{1/2} \gg n^{-5/2}. \tag{8}$$

Это неравенство при $k,\ m \sim 1$ сильнее, чем (7).

Полученное выражение для собственных функций электрона приводит к простым формулам для дипольных матричных элементов. Для перехода из основного состояния ψ_0 в высоковозбужденное с $m = 0$ имеем

$$|\langle \psi_0 | z | \psi_{0nk} \rangle|^2 = \frac{2^{11} 3^{2/3}\pi}{e^4 \Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \frac{\gamma^{1/3}}{n^3} \beta^{1/2}, \qquad \beta = \frac{\sin\left(\pi\sqrt{\kappa} - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\pi\sqrt{\kappa} + \frac{2\pi}{3}\right)}, \tag{9}$$

а для аналогичного перехода в состояние с $m = \pm 1$

$$|\langle \psi_0 | x | \psi_{\pm 1, nk} \rangle|^2 = \frac{2^{13} 3^{4/3} \pi^2 (k+1)}{e^4 \Gamma^4\left(\frac{1}{6}\right)} \frac{\gamma^{2/3}}{n^3} \beta. \tag{10}$$

Остальные переходы из основного состояния по правилам отбора являются запрещенными. Из (9), (10) видно осциллирующее с изменением магнитного поля (а, при фиксированном γ, с изменением n) поведение сил осцилляторов. В работе [1] численно были получены значения сил осцилляторов при $\gamma = 2 \cdot 10^{-5}$ и $n = 23, \ldots, 50$, (при этом $\gamma n^3 < 2{,}5$). Зависимость сил осцилляторов от n оказывается, согласно [1], монотонной при $\gamma n^3 < 1$, и зарождение нерегулярности обнаруживается в хвосте исследованного спектра, после сильного перемешивания при $\gamma n^3 \sim 1$. Результаты (9), (10) отвечают, как отмечалось, случаю $\gamma n^3 \gg 1$ и описывают поведение сил осцилляторов в зонах устойчивости. На границе зоны при $\gamma = \gamma_{nq}^-$ выражения (9) и (10) имеют сингулярность, вызванную классическим резонансом. Относительная величина увеличения интенсивности определяется множителем $\beta^{1/2}$ для $m = 0$ и множителем β для $m = \pm 1$. Вблизи резонанса имеем

$$\beta \approx 0{,}28(\gamma - \gamma_{nq}^-)^{-1} n^{-3}. \tag{11}$$

Формула (11) справедлива при условиях (7), (8). Оценить максимальную величину β можно, положив $\mu \gtrsim 1/n$, откуда $\beta \lesssim n^2$.

В заключение отметим, что если в правиле квантования (4) опустить фазы $\pi/3$, то оно переходит в результат адиабатического приближения, так как в этом случае $\mathrm{arc\,tg}(...) = \pi\gamma\epsilon^{-3}/2$. Эти фазы можно опустить, если выполнено неравенство, противоположное первому в (3), т. е. для очень сильного магнитного поля.

Автор глубоко признателен Б.С.Монозону, Е.А.Соловьеву, О.Б.Фирсову и М.И.Чибисову за обсуждение работы.

Литература

1. *Clark G.W., Taylor K.T.* J. Phys., 1980, **13B**, L737
2. *Gay J.C. et al.* J. Phys., 1980, **13B**, L729.
3. *Delande D., Gay J.C.* Phys. Lett., 1981, **82A**, 393.
4. *Fano U.* Phys. Rev., 1980, **22A**, 2660.
5. *Соловьев Е.А.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **34**, 278.
6. *Сумецкий М.Ю.* Изв. АН СССР, сер. физ., 1981, **45**, 2440.
7. *Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.

Ленинградский
электротехнический институт
им. М.А.Бонч-Бруевича

Поступила в редакцию
13 апреля 1982 г.