ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГРАВИТАЦИОННОГО ДЕТЕКТОРА ПРИ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

В.В.Додонов, В.И.Манько, В.Н.Руденко

В квантовом пределе обсуждается влияние начального состояния и параметрической раскачки на чувствительность гравитационного детектора. Показана возможность существенного роста чувствительности в режиме параметрического резонанса.

В недавних работах [1 – 3] обращено внимание на увеличение энергетического отклика квантового осциллятора (модели гравитационного детектора) на внешнюю силу $f(t)$ при специальном выборе начального состояния. Аргументация в пользу квантового описания гравдетектора, как известно [4, 5], связана с необходимостью измерения слабых вариаций его амплитуды $\Delta x \sim 10^{-18} \div 10^{-19}$ см, не превышающих характерного квантового стандарта $\Delta x_{\text{кв}} \simeq$ $\simeq (\hbar / m\omega)^{1/2} \sim 10^{-18}$ см, при $m \simeq 10^5$ г, $\omega \simeq 10^4$ рад/сек.

Цель данной заметки: 1) показать, что такой выбор [1, 2] не сопровождается повышением чувствительности, превосходящим ранее известные оценки; 2) сформулировать в общем виде задачу отыскания оптимального начального состояния гравдетектора; 3) показать возможность заметного роста чувствительности при использовании параметрической раскачки.

1. Изменение средней энергии осциллятора под действием резонансной силы $f(t) = F\sin\omega t$, $\omega t \gtrsim 1$ равно

$$\Delta E(t) = F^2 t^2 / 8m - Ft\omega < \hat{q}(0) > / 2, \tag{1}$$

т. е. для малых сил при $< \hat{q}(0) > \neq 0$ вклад линейного по силе слагаемого может быть гораздо больше квадратичного члена. Для суперпозиционного начального состояния $| \psi > =$ $= (| n > - | n+1 >) / \sqrt{2}$, предложенного в [1] с целью повышения чувствительности гравдетектора, формула (1) дает $\Delta E(t) \simeq Ft[\hbar\omega(n+1)/8m]^{1/2}$. При $Ft \ll [m\hbar\omega(n+1)]^{1/2}$ эта величина превосходит приращение энергии осциллятора $F^2 t^2/8m$, возбуждаемого из чистого состояния $| n >$. Указанное различие обусловлено квантовыми интерференционными эффектами. Сила $f(t)$ будет зарегистрирована при выполнении неравенства

$$|\Delta E| \equiv |E(t) - E(0)| \gtrsim (< \hat{E}^2(0) > - < \hat{E}(0) >^2)^{1/2} \equiv [\sigma_E(0)]^{1/2}. \tag{2}$$

Для суперпозиционного состояния $| \psi >$ справедливо $\sigma_E(0) = (\hbar\omega)^2/4$; сравнение (1) и (2) дает чувствительность

$$F_{min} \gtrsim 4[m\hbar\omega/(n+1)]^{1/2}/t, \tag{3}$$

неограниченно растущую ($F_{min} \to 0$) с ростом n. Оценка (3), однако содержится уже в работах [4, 5]. Покажем, что для достижения чувствительности (3) не обязательно требование суперпозиционного начального состояния $| \psi >$. Для состояний $| n >$ все центрированные моменты – нулевые, т. е. (2) автоматически выполнено. Дополнительное требование, необходимое при однократном измерении, заключается в малой вероятности сохранения состояния

©Издательство "Наука". Письма в ЖЭТФ, 1982 г.

осциллятором: $P_{nn} \ll 1$ [6]. Оно удовлетворяется, если $g(n+{}^1/_2) \gtrsim 1$, $g = F^2t^2/8m\hbar\omega$; несложно показать, что при этом: $\mathrm{Sp}[\hat\rho_0(\hat E(t) - <\hat E(t)>)^{2k}] \gtrsim (\hbar\omega)^{2k}$. Обратное утверждение, вообще говоря, необязательно, но для дисперсии ($k = 1$) оно имеет место, так что если

$$\Delta\sigma_E = \sigma_E(t) = (\hbar\omega/m)(n+1/2)|f_\omega(t)|^2 \gtrsim (\hbar\omega)^2, \tag{4}$$

то $P_{nn} \ll 1$, и справедлива формула (3). Выше $\hat\rho_0$ -- начальная матрица плотности :

$$f_\omega(t) = \int\limits_0^t f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau .$$

2. В общем случае задача об оптимальной $\hat\rho_0$ (см. также [3]) при заданной эрмитовой наблюдаемой $\hat Y$ сводится к отысканию состояний, максимизирующих функционал

$$R\{\hat\rho, \hat Y\} = \{\mathrm{Sp}[\hat\rho(\hat Y(t,f) - \hat Y(t))]\}^2 / \mathrm{Sp}\{\hat\rho[\hat Y(t) - \mathrm{Sp}(\hat\rho\hat Y(t))]^2\}; \tag{5}$$

$\hat Y(t,f)$, $\hat Y(t)$ – гайзенберговские операторы в присутствие силы и без нее. Для чистых состояний типа $|\phi> = \alpha|n> + \beta|n+1>$; $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, с учетом (2) максимум $|\Delta E|/\sqrt{\sigma_E(0)}$ достигается как раз при выборе параметров $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{2}$. В случае коррелированных состояний с функцией Вигнера

$$W(q,p) = \Delta^{-1/2}\exp\{-[\sigma_p\tilde q^2 + \sigma_q\tilde p^2 - 2\sigma_{pq}\tilde p\tilde q]/2\Delta\}, \tag{6}$$

$$\tilde q = q - <\hat q>, \quad \tilde p = p - <\hat p>, \quad \Delta = \sigma_p\sigma_q - \sigma_{pq}^2 \geqslant \hbar^2/4 .$$

минимум дисперсии энергии осциллятора отвечает $\sigma_{pq} = <\hat p> = 0$, $\sigma_p\sigma_q = \hbar^2/4$; обнаружимая сила при этом равна $F_{min} \gtrsim t^{-1}2m\omega\sqrt{\sigma_q}$, $(<\hat q> \gtrsim q_* = (\hbar/2m\omega)^2\sigma_q^{-3/2})$. Вводя эффективное число квантов $n_* = <\hat E>/\hbar\omega \simeq m\omega q_*^2/2\hbar$ $(\sigma_q \ll \hbar/2m\omega$, $<\hat q> \simeq q_*)$, получим

$$F^*_{min} \gtrsim t^{-1}(m\hbar\omega)^{1/2}n_*^{-1/6}, \tag{7}$$

т. е. состояния (6) проигрывают состояниям $|n>$ или $|\psi>$, когда наблюдаемой является энергия. Однако при измерении интеграла движения $\hat I = \hat q\cos\omega t - (m\omega)^{-1}\hat p\sin\omega t$ (оператора начальной координаты [5,7]) гауссовы состояния также дают чувствительность (3) со своим эквивалентным значением $n_* = <\hat E>/\hbar\omega$.

3. Для параметрически регенерированного детектора с переменной частотой $\omega(t)$ [8] чувствительность может быть повышена по сравнению с (3), если измерять интеграл движения $\hat K(t)$, являющийся обобщением оператора числа квантов [9]:

$$\hat K(t) = (1/2)\{|\epsilon(t)|^2\hat p^2 + |\dot\epsilon(t)|^2\hat q^2 - \mathrm{Re}(\dot\epsilon\epsilon^*)(\hat q\hat p + \hat p\hat q)\}; \tag{8}$$

здесь $\epsilon(t)$ – комплексное решение уравнения $\ddot\epsilon + \omega^2(t)\epsilon = 0$, удовлетворяющее условию $\mathrm{Im}(\dot\epsilon\epsilon^*) = 1$; спектр $\hat K(t)$ – эквидистантный: $K_n = n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; начальное состояние полагаем собственным для $\hat K(t)$. (Трудности реализации измерения $\hat K(t)$ те же, что для интеграла движения $\hat I(t)$ [5]). Под действием силы оператор (8) перестает быть интегралом движения, его дисперсия зависит от времени:

$$\sigma_K(t) = (n+1/2)|\delta(t)|^2; \qquad \delta(t) = \int\limits_0^t \epsilon(\tau)f(\tau)d\tau . \tag{9}$$

Условие регистрации, по аналогии с (4), есть $\sigma_K \gtrsim 1$. В случае резонанса в первой зоне Матье $(\omega^2(t) = \omega_0^2[1 + 4\mu\cos 2\omega_0 t]$; $|\mu| \ll 1)$ для $\epsilon(t)$ справедливо приближенное решение: $\epsilon(t) = \omega_0^{-1/2}[\mathrm{ch}(\omega_0\mu t)\exp(i\omega_0 t) - i\,\mathrm{sh}(\omega_0\mu t)\exp(-i\omega_0 t)]$, которое при $\omega_0\mu t \gg 1$ приводит к следующей оценке обнаружимой силы:

$$F_{min} \gtrsim 2(\omega_0\mu t)\exp(-\omega_0\mu t)(m\hbar\omega_0)^{1/2}/t(n+{}^1/_2)^{1/2}. \tag{10}$$

Выигрыш при $\omega_0 \mu t \exp(-\omega_0 \mu t) \ll 1$ обусловлен увеличением эквивалентного уровня n_* за счет регенерации. Чувствительность (10) достигается также для начальных состояний типа $|\psi>$ и для гауссовых, если измерять интеграл движения $\hat{A}(t) = \epsilon(t)\hat{p} - m\dot{\epsilon}(t)\hat{q}$, являющийся обобщением оператора $\hat{I}$ в случае переменной частоты $\omega(t)$. Выигрыш, прогнозируемый (10), имеет место лишь при достаточно длинных воздействиях на гравдетектор. По этой причине оценим перспективы использования параметрически регенерированного детектора для приема излучения от пульсаров.

Для пульсара в Крабовидной туманности границы прогноза плотности потока энергии составляют интервал $I_0 = 10^{-8} \div 10^{-22}$ эрг/см^2 сек [10], что отвечает возмущающей детектор силе $F_{\text{гр}} = (16\pi G c^{-3} I_0)^{1/2} m\omega l$; при $m \simeq 10^5$ г, длине $l = 10^2$ см, $\omega = 4 \cdot 10^2$ рад/сек; $F_{\text{гр}} \sim$ $\sim (10^{-13} - 10^{-20})$дин. В то же время квантовый предел чувствительности веберовского гравдетектора при измерении его энергии в состоянии с малыми $n \sim 1$ имеет порядок $F_{\text{гр}} \simeq$ $\simeq t^{-1}(m\hbar\omega)^{1/2} \sim 10^{-13}$ дин на временах $t \simeq 10^4$ сек, меньших времени релаксации $\tau^* \sim$ $\sim Q\omega^{-1} \sim 10^6$ сек.

Регенерация детектора типа [11] с пьезо или магнитострикционным упругим элементом, зажатым между двумя пробными массами, возможна за счет слабой вариации константы упругости $\mu = \Delta\epsilon/\epsilon \sim 3 \cdot 10^{-6}$, управляемой внешним полем. Это дает фактор $\mu\omega t \simeq 12$, и соответствующая обнаружимая сила F_g (10) уменьшается в 10^5 раз (недостающие два порядка компенсируются начальным возбуждением с $n \sim 10^5 \div 10^6$). Для профилированного детектора с емкостным параметрическим преобразователем [12] удобно менять частоту детектора за счет вариаций электромагнитной жесткости, вносимой датчиком. Последняя может быть сравнимой с $m\,\omega_0^2 \sim 10^{10}$ дин (см. детали в [13]), благодаря чему легко достижимы $\mu \sim 10^{-2} - 10^{-4}$, ограничения здесь связаны лишь с требованием малости вносимого затухания. Трудности создания состояния антенны, собственного для квадратичного интеграла движения (8) такие же, как и для создания состояния с заданной энергией, поскольку физический смысл этой величины состоит в том, что она равна начальной энергии осциллятора. Принципиальных запретов на измерение этой величины не существует — это линейная комбинация кинетической и потенциальной энергий осциллятора с зависящими от времени коэффициентами. Аналогично, измерение действительной и мнимой частей линейного интеграла движения $\hat{A} = i\Sigma^{1/2}(\epsilon\hat{p} - \dot{\epsilon}\hat{x})$, найденного в [14] и являющегося обобщением комплексной амплитуды (см. [5]) на случай параметрического осциллятора, может быть произведено так же как измерение этой амплитуды, обсуждавшееся в литературе.

Литература

1. *Weber J.* Phys. Lett., 1981, **81A**, 542.
2. *Walls D.F., Zoller P.* Phys. Lett., 1981, **85A**, 118.
3. *Hollenhorst J.N.* Phys. Rev., 1979, **D19**, 1669.
4. *Брагинский В.Б., Воронцов Ю.И.* УФН, 1974, **114**, 41.
5. *Braginsky V.B., Vorontsov Y.I., Thorne K.S.* SCIENCE, 1980, **209**, 547.
6. *Брагинский В.Б., Назаренко В.С.* ЖЭТФ, 1969, **57**, 1421.
7. *Додонов В.В., Манько В.И., Руденко В.Н.* ЖЭТФ, 1980, **78**, 881.
8. *Грищук Л.П., Сажин М.В.* ЖЭТФ, 1981, **80**, 1249.
9. *Lewis H.R.*, Jr. J. Math. Phys. 1968, **9**, 1976.
10. *Пресс У., Торн К.* УФН, 1973, **110**, 569.
11. *Drever R., Hough J., Bland R., Ressnoff G.* Nature 1973, **246**, 340.
12. *Брагинский В.Б., Манукин А.Б., Попов Е.И., Руденко В.Н.* ЖЭТФ, 1974, **66**, 802.
13. *Брагинский В.Б., Манукин А.Б.* Измерение малых сил в физических экспериментах. М., Наука, 1974.
14. *Malkin I.A., Manko V.I.* Phys. Lett., 1970, **32A**, 243.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
13 мая 1982г.