Письма в ЖЭТФ, том 36, вып.3, стр. 78 – 81 5 августа 1982 г.

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГАЙЗЕНБЕРГА

А.В.Михайлов, А.И.Яремчук

Показано, что аксиально-симметричные решения модели Гайзенберга в двумерном пространстве могут быть описаны методом обратной задачи. Найдены бесконечные серии нелокальных законов сохранения и точных решений. Доказано отсутствие локализованных в пространстве решений.

Уравнение модели Гайзенберга, описывающее движение вектора намагниченности **S** в магнитном поле **H**, имеет вид

$$\mathbf{S}_t = [\,\mathbf{S}, \Delta \mathbf{S}\,] + [\,\mathbf{H}, \mathbf{S}\,]. \tag{1}$$

В одномерном случае это уравнение было детально исследовано в работах [1,2] методом обратной задачи рассеяния. В случае бо́льшего числа пространственных переменных это уравнение по-видимому, не является интегрируемым. Мы покажем, что в двумерном случае в предположении аксиальной симметрии решения к этой модели применим метод обратной задачи, что позволяет описать ее решения с той же полнотой, как и в одномерном случае.

1. Пусть x_1, x_2 – декартовы координаты на плоскости. Мы будем считать, что **S** зависит только от t и $x = (x_1^2 + x_2^2)/4$, при этом уравнение (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &A_t - B_x + [A, B] = 0, \\ &[\sigma_3, B] + 2i\,(xA)_x = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$A = g_x g^{-1},\ B = g_t g^{-1},\ 2iS = \vec{\sigma}\mathbf{S} = e^{-(i/2)tH\sigma_3} g^{-1} \sigma_3 g e^{(i/2)tH\sigma_3},$$

причем g выбрана так, что $g^+ g = I$, $\operatorname{diag} A = 0$.

Система уравнений (2) является условием совместности двух линейных уравнений на матрицу ψ

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = (i\lambda\sigma_3 + A)\,\psi \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = (2i\lambda^2 x\sigma_3 + 2\lambda x A + B)\,\psi, \tag{4}$$

где $\lambda = -[\,2\,(t+u)\,]^{-1}$, u – спектральный параметр на плоскости $\mathbb{C}$.

2. Вычислим вначале законы сохранения для уравнения (2). Мы будем предполагать, что $S(x, t_0)$ существенно отличается от $\sigma_3/2i$ лишь в ограниченной области с характерным размером R_0. Фундаментальное решение системы (3), (4) можно представить в виде

$$\psi = g(x, t)\,\chi(x, t, u)\exp(i\lambda\sigma_3 x), \text{ где } \chi(\infty, t, u) = I.$$

Из (3), (4) следует, что χ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi = -2\lambda S\chi - i\lambda\chi\sigma_3, \quad \frac{\partial}{\partial t}\chi(0, t, u) = 0 \tag{5}$$

и раскладывается в ряд $\chi(x, t, u) = I + \sum_{n\geq 1} \chi_n(x, t)\,u^{-n}$. Коэффициенты $\chi_n(x, t)$

легко вычисляются и при $x = 0$ не зависят от времени. Первые два интеграла $I_n = \chi_n(0, t)$ имеют вид

$$I_1 = \int_0^\infty (S(x, t) - \sigma_3/2i)\,dx$$
$$I_2 = tI_1 + \int_0^\infty \int_0^\infty dx_1 dx_2\, \theta(x_2 - x_1)[S(x_1, t)S(x_2, t) - \qquad (6)$$
$$- (S(x_1, t) + S(x_2, t))\sigma_3/2i - 1/4].$$

Интеграл I_1 имеет смысл магнитного момента. Рассмотрим интеграл

$$J = \mathrm{tr}(I_2\sigma_3/2i) = (t/2)\int_0^\infty (1 - S_3)\,dx + \int_0^\infty\int_0^\infty dx_1 dx_2\, \theta(x_2 - x_1)\,[\mathbf{S}(x_1, t), \mathbf{S}(x_2, t)]_3.$$

Первое слагаемое положительно определено и линейно растет со временем, поэтому радиус локализации решения обязан расти со временем, в противном случае второе слагаемое оставалось бы ограниченным. Иными словами, не существует решений типа "магнонных капель". Любая локализованная в начальный момент времени флуктуация намагниченности, зависящая только от расстояния до начала координат, расплывается. Разумеется, мы предполагаем интегралы I_1, I_2 сходящимися.

3. Решение задачи Коши сводится к прямой и обратной задачам рассеяния для оператора (3) на полуоси $x > 0$. Мы будем предполагать, что начальные данные $A(x, 0)$ ограничены вместе с производной и интегрируемы ($\int_0^\infty |A|\,dx < \infty$).

Рассмотрим два набора фундаментальных решений Φ_0 и Φ_+ уравнения (3), определенных следующими условиями:

$$\Phi_0(x, t, \lambda)|_{x=0} = I, \quad \Phi_+(x, t, \lambda) \to \exp(i\lambda\sigma_3 x) \text{ при } x \to +\infty. \qquad (7)$$

Эти решения линейно зависимы

$$\Phi_0(x, t, \lambda) = \Phi_+(x, t, \lambda)\,T(t, \lambda) \qquad (8)$$

и матрица $T(t, \lambda)$ называется матрицей рассеяния. С помощью (4) можно показать что:

$$T(t, \lambda) = T\left(0, \frac{\lambda}{1 + 2t\lambda}\right) T^{-1}\left(0, \frac{1}{2t}\right). \qquad (9)$$

То есть $T(t, \lambda)$ полностью определяется своим значением в нулевой момент времени. Матрица $T(t, \lambda)$ несет всю информацию о потенциале A. Восстановление потенциала $A(x, t)$ может быть сведено к уравнению типа Винера – Хопфа. Разумеется, матрица T и функции Φ_0, Φ_+ обладают некоторыми аналитическими свойствами и специальным ассимптотическим поведением, которые мы используем при выводе этого уравнения, но не имеем возможности привести здесь. Пусть $\hat{F}(t, \lambda) = T - I$, $\hat{f} = \Phi_+^{-}\exp(-i\lambda\sigma_3 x) - I$. Тогда преобразование Фурье

$$F(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\sigma_3\xi}\hat{F}(t, \lambda)\frac{d\lambda}{2\pi}, \quad f(x, t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x, t, \lambda)\,e^{-i\lambda\sigma_3\xi}\frac{d\lambda}{2\pi} \qquad (10)$$

обрывается при $\xi < 0$, а при $\xi > 0$ удовлетворяет уравнению

$$f(x, t, \xi) + \int_\xi^\infty f(x, t, \xi')F_1(t, \xi' - \xi)\,d\xi' + \int_0^\infty f(x, t, \xi')F_2(t, 2x + \xi + \xi')\,d\xi' +$$
$$+ F_2(t, 2x + \xi) = 0, \qquad (11)$$

где $F_1(t,\ \xi)$ и $F_2(t,\ \xi)$ обозначают диагональную и антидиагональную часть матрицы F. Функция $g(x,\ t)$ восстанавливается по решению этого уравнения

$$g(x, t) = \Phi_+(x,\ t,\ \lambda)\big|_{\lambda=0} = I + \int_0^{\infty} f(x,t,\ \xi)\, d\xi\,. \tag{12}$$

Отметим, что в точке $x = 0$ функция $g(0, t)$ определяется явно по $T(0, \lambda)$ без решения уравнения (11)

$$g(0,t) = T(0, {}^1/_{2t})\, g(0,0)\,. \tag{13}$$

4. Уравнения (9), (11) дают возможность рассмотреть ассимптотическое поведение решений задачи Коши при $|t| \to \infty$ и фиксированных x. Из (9) следует, что $\hat{F}(t,\ \lambda) \to 0$ при $t \to \infty$ и

$$F(t,\ \xi) = t^{-2}\exp(-i\sigma_3\xi/2t)F_0 + O(t^{-3}),\ F_0 = \mathrm{const}\,. \tag{14}$$

Решая (11) в нулевом приближении и подставляя в (12), получим

$$2iS = \sigma_3 + t^{-1} e^{-i\sigma_3\frac{x}{t} - \frac{i}{2} tH\sigma_3} [\sigma_3, g_0] e^{\frac{i}{2} tH\sigma_3} + O(t^{-2}),\ g_0 = \mathrm{const}\,. \tag{15}$$

Таким образом, при конечных x и $|t| \to \infty$ решение стремится к невозмущенному, при этом скорость и амплитуда прецессии уменьшается, что согласуется с выводом, сделанным в пункте 2.

5. Метод обратной задачи позволяет построить серии точных решений уравнения (2) стандартным образом [3,4]. Волновая функция $\psi(x,\ t,\ \lambda)$ для N-солитонного решения представляется в виде

$$\psi_N = \prod_{i\leqslant N}\left(I + \frac{\lambda_i - \bar\lambda_i}{\lambda - \lambda_i} P_i(x,\ t)\right)\exp(i\lambda\sigma_3 x), \tag{16}$$

где

$$P_i^{\alpha\beta}(x,\ t) = \frac{n_i^{\alpha}(x,t)\,\bar n_i^{\beta}(x,t)}{\sum\limits_{\gamma} |n_i^{\gamma}(x,\ t)|^2},\ n_i(x,t) = \psi_{i-1}(x,\ t,\ \bar\lambda_i)\,n_{i0},\ \lambda_i = -\frac{1}{2(t+u_i)}\,. \tag{17}$$

Комплексные числа u_i и n_{i0}^1/n_{i0}^2 являются произвольными параметрами решения. По значению $\psi(x,\ t,\ \lambda)$ при $\lambda = 0$ легко найти $S(x,\ t)$, в простейшем случае односолитонного решения

$$S_1 + iS_2 = \frac{2a}{t^2 + a^2}(-it + a\,\mathrm{th}\,\varphi)\, e^{iX}/\mathrm{ch}\,\varphi\,,$$

$$S_3 = 1 - \frac{2a^2}{t^2 + a^2}\,\frac{1}{\mathrm{ch}\,\varphi}\,, \tag{18}$$

$$X = \frac{tx}{t^2 + a^2} + p,\quad \varphi = \frac{ax}{t^2 + a^2} + q\,,$$

где $a,\ p,\ q$ – произвольные вещественные параметры. Это решение иллюстрирует выводы, сделанные в пунктах 2 и 4 о расплывании локализованных возмущений. Солитоны представляют собой кольцевую волну, радиус и толщина которой увеличивается со временем по линейному (при больших t) закону, а амплитуда при фиксированном x падает как t^{-1}.

6. В ряде работ (см., например,[5]) к уравнению (1) добавлен член, описывающий анизотропию взаимодействия, а кроме аксиальной симметрии предполагалась простая зависимость решения от времени (однородность прецессии)

$$g = \exp(-i\sigma_2 \theta(r)) \exp(\omega t \sigma_3 / 2i). \tag{19}$$

При этом были найдены решения типа "магнонных капель", быстро спадающие при r, больших некоторого характерного размера R_0. В изотропном случае $R_0 = \infty$, а $\theta(r)$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\theta + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\theta + \omega \sin\theta = 0, \tag{20}$$

которое имеет несингулярные и спадающие в пространстве решения. При больших r эти решения имеют ассимптотику

$$\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{r}{\sqrt{\omega}} - \theta_0^2 \ln r + c_1\right) + O(r^{-3/2}). \tag{21}$$

Из-за медленного спадания решения интегралы энергии и магнитного момента расходятся, кроме того оно неинтегрируемое в смысле нормы, введенной в пункте 3, и поэтому не попадает в исследуемый класс. Матрица рассеяния $T(0,\lambda)$ в этом случае имеет существенную особенность

$$T(0,\lambda) = g_0 \exp(i\sigma_3 \omega / 4\lambda)\, g_0^{-1},$$

которую необходимо учитывать при выводе уравнений обратной задачи. В заключение мы благодарим Э.И.Рашба за обсуждение результатов.

Литература

1. *Lakshman M.* Phys. Lett., 1977, **61A**, 53.
2. *Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А.* ТМФ, 1979, **38**, 26,
3. *Захаров В.Е., Михайлов А.В.* ЖЭТФ, 1978, **74**, 1953.
4. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
5. *Kosevich A.M., Ivanov V.A., Kovalev A.S.* Phys. 1981, **3D**, 363,

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 июня 1982 г.