Письма в ЖЭТФ, том 36, вып.3, стр. 82 – 84 *5 августа 1982 г.*

СПОНТАННО НАРУШЕННАЯ ПОЛНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ

А.Ф.Андреев

Предположено, что уравнения теории должны обладать спонтанно нарушенной инвариантностью относительно комплексной группы Пуанкаре. Обсуждаются свойства соответствующего голдстоуновского поля.

В уравнениях современной теории отсутствует эквивалентность всех (включая сверхсветовые) скоростей движения как целого. Это обычно связывается с тем фактом, что относительная скорость любых наблюдателей досветовая. Однако последний факт – свойство не только уравнений, но и основного состояния (вакуума). Поскольку симметрия уравнений может быть выше симметрии основного состояния, представляется весьма целесообразным расширить симметрию уравнений до полной относительности, т.е. эквивалентности всех (кроме самой световой) скоростей. В обычных условиях, чтобы обеспечить досветовой характер относительных скоростей, добавочная симметрия должна спонтанно нарушаться.

Матрицы преобразований Лоренца, соответствующих сверхсветовым скоростям, содержат мнимые элементы. Для того, чтобы объединить такие преобразования с вещественными в рамках одной группы, необходимо ввести в качестве группы симметрии 12-параметрическую комплексную группу Лоренца (одну из классических комплексных групп – $SO(4, C)$, см., например,[1]), т.е. совокупность всех комплексных линейных (унимодулярных) преобразований четырех координат x^i, оставляющих инвариантным скалярное произведение $x_i x^i$. Введение комплексных преобразований Лоренца и тем самым комплексных скоростей позволяет "обойти" в комплексной плоскости особую точку $v = c$. Для обеспечения группового свойства необходимо наряду с вещественными включить также и комплексные трансляции. Таким образом, полная относительность сводится к инвариантности относительно 20-параметрической комплексной группы Пуанкаре (комплексная группа Лоренца плюс комплексные трансляции), нарушенной до 10-параметрической вещественной подгруппы. Фактически необходимо конечно, найти реализацию комплексной группы в физическом вещественном пространстве-времени, исключив комплексность координат введением соответствующих голдстоуновских полей.

Введем спинорную координату $\zeta = \mathbf{x}\vec{\sigma} + x^\circ$ и запишем общее комплексное преобразование Пуанкаре $L(\beta, \lambda, r)$ в виде $\zeta' = \beta r \zeta r^+ + \lambda$, где β, r – унимодулярные матрицы, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, λ_1 и λ_2 – эрмитовы. При $\lambda_2 = 0$, $\beta = 1$ получаем вещественное преобразование. В соответствии с общей теорией нелинейных реализаций симметрии [2–4], введем два голдстоуновских матричных поля $B(x)$, $\Lambda(x)$, закон преобразования которых определяется условием $L(\beta, \lambda, r) L(B, \Lambda, 1) = L('B, '\Lambda, 1) L(1, 0, \tilde{r})$ с некоторым $\tilde{r}$. В данном случае получаем

$$'B('x) = \beta r B(x) r^{-1}, \quad '\Lambda('x) = \beta r \Lambda(x) r^+ + \lambda, \quad \tilde{r} = r. \tag{1}$$

Ковариантные дифференциалы $DB = B^{-1}dB$, $D\Lambda = B^{-1}d\Lambda$ голдстоуновских полей преобразуются как лоренцовы тензоры $'(DB) = rDBr^{-1}$, $'(D\Lambda) = rD\Lambda r^+$.

Перейдем к тензорным обозначениям, полагая

$$\Lambda(x) = x^\circ + ia^\circ(x) + \vec{\sigma}(\mathbf{x} + i\mathbf{a}(x)), \quad \lambda = \lambda_1^0 + i\lambda_2^0 + \vec{\sigma}(\vec{\lambda}_1 + i\vec{\lambda}_2),$$

$$B(x) = f_s + \sigma_a\left(\frac{1}{2} e_{a\beta\gamma} f^{\beta\gamma} + i f^{0a}\right), \quad \beta = \varphi_s + \sigma_a\left(\frac{1}{2} e_{a\beta\gamma} \varphi^{\beta\gamma} + i\varphi^{0a}\right).$$

Здесь $a^i(x)$, $\lambda^i_{1,2}$ – вещественные четырехмерные векторы, $f^{ik}(x)$, φ^{ik} – вещественные антисимметричные тензоры, скаляр f_s выражается через f^{ik} условием $\det B = 1$:

$$f_s \equiv f_{s1} + i f_{s2} = \left(1 + \frac{1}{2} f_{ik} f^{ik} + i e_{iklm} f^{ik} f^{lm}\right)^{1/2},$$

точно так же $\varphi_s = \varphi_{s1} + i\varphi_{s2}$ выражается через φ^{ik}.

Законы преобразования голдстоуновских полей $a^i(x)$, $f^{ik}(x)$ и координат x^i в силу (1) имеют вид

$$'x^i = \varphi_{s1} x^i - \varphi_{s2} a^i(x) - \varphi^i{}_k a^k(x) - \frac{1}{2} e^{iklm} \varphi_{kl} x_m + \gamma^i{}_1,$$

$$'a^i('x) = \varphi_{s1} a^i(x) + \varphi_{s2} x^i + \varphi^i{}_k x^k - \frac{1}{2} e^{iklm} \varphi_{kl} a_m(x) + \gamma^i{}_2$$

$$'f^{ik}('x) = f_{s1} \varphi^{ik} + \varphi_{s1} f^{ik}(x) - \frac{1}{2} e^{iklm}\left(f_{s2}\varphi_{lm} + \varphi_{s2} f_{lm}\right) + e^{iklm} \varphi^n{}_m f_{ln}.$$

Ковариантные дифференциалы равны

$$Dx^i = f_{s1} dx^i - f_{s2} da^i + f^i{}_k da^k + \frac{1}{2} e^{iklm} f_{kl} dx_m,$$

$$Da^i = f_{s1} da^i + f_{s2} dx^i - f^i{}_k dx^k + \frac{1}{2} e^{iklm} f_{kl} da_m,$$

$$Df^{ik} = f_{s1} df^{ik} - \frac{1}{2} f_{s2} e^{iklm} df_{lm} - e^{iklm} f^n{}_m df_{ln}.$$

Лагранжиан любого лоренцова поля независимо от его тензорной структуры становится инвариантным относительно комплексной группы, если в нем обычные производные ∂_i заменить на ковариантные $D_i = h^k{}_i \partial_k$, где величины $h^i{}_k$ образуют матрицу, обратную к

$$\bar{h}^i{}_k \equiv \frac{Dx^i}{dx^k} = f_{s1} \delta^i_k - f_{s2} \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + f^i{}_e \frac{\partial a^l}{\partial x^k} + \frac{1}{2} e^{imn}{}_k f_{mn}.$$

Производные D_i удовлетворяют коммутационным соотношениям $[D_i D_k] = \Delta^l{}_{ik} D_l$, где

$$\Delta^l_{ik} = \bar{h}^l{}_m \left(h^n{}_i \frac{\partial h^m{}_k}{\partial x^n} - h^n{}_k \frac{\partial h^m{}_i}{\partial x^n}\right)$$

есть очевидно, лоренцев тензор.

Особого рассмотрения требуют калибровочные поля. Калибровочное преобразование потенциала электромагнитного поля имеет вид $A_i \to A_i + D_i \chi$. Калибровочно инвариантные напряженности определяются как $F_{ik} = D_i A_k - D_k A_i - \Delta^l{}_{ik} A_l$. Лагранжиан электромагнитного поля, как обычно, пропорционален $F_{ik} F^{ik}$.

Величины $(Da_i / Dx^k) - (Da_k / Dx^i)$ образуют лоренцов тензор. В минимальной реализации комплексной симметрии его следует обратить в нуль. При этом f_{ik} инвариантно выражается через a^i. В линейном приближении имеем

$$\frac{Da_i}{Dx^k} - \frac{Da_k}{Dx^i} \approx \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - 2 f_{ik}, \quad f_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right). \qquad (2)$$

Рассмотрим свойства слабого голдстоуновского поля $a^i(x)$. Его взаимодействие с лоренцевыми полями определяется величинами $h^i{}_k = \delta^i{}_k - {}^1/_2\, e^{imn}{}_k f_{mn}$, т.е. полем f_{ik}. Векторное поле a^i не имеет реального смысла и играет роль потенциала. Скалярные поля или вообще поля, в лагранжиане которых операторы ∂_i свертываются только друг с другом, не взаимодействуют с полем f_{ik}. То же самое имеет место и для электромагнитного поля. Чтобы убедиться в этом, перейдем к эквивалентному описанию, произведя для всех лоренцовых полей $\Phi(x)$ преобразование

$$\widetilde{\Phi}(x) = \left\{ 1 + \frac{1}{2}\left(h^i_{\ k} - \delta^i_k\right) L_i^{\ k} \right\} \Phi(x),$$

где L_{ik} – генераторы вещественной группы Лоренца. Для новых напряженностей $\widetilde{F}_{ik}$ и потенциалов $\widetilde{A}_i$ электромагнитного поля имеем $\widetilde{F}_{ik}\widetilde{F}^{ik} = F_{ik}F^{ik}$, $\widetilde{F}_{ik} = \partial_i \widetilde{A}_k - \partial_k \widetilde{A}_i$, откуда следует сформулированное утверждение. Лагранжиан спинорного поля после преобразования (3) имеет вид (тильду в дальнейшем опускаем)

$$L = \frac{i}{2}\left\{ \overline{\psi}\gamma^i (\partial_i + ieA_i)\psi - (\partial_i - ieA_i)\overline{\psi}\gamma^i \psi + i \frac{\partial f^{ik}}{\partial x^k} \overline{\psi}\gamma^5\gamma_i \psi \right\} - m\overline{\psi}\psi.$$

Наиболее общий вид лагранжиана самого голдстоуновского поля в линейной теории в силу (2) и соотношения $Df_{ik} \simeq df_{ik}$ сводится к одному члену

$$L = -\frac{1}{16\pi G} g^{lm} \frac{\partial f^{ik}}{\partial x^l} \frac{\partial f_{ik}}{\partial x^m}, \tag{5}$$

где G – некоторая константа взаимодействия. Приведем получающиеся из (2), (4), (5) уравнения поля в условиях, когда импульсы спинорных частиц $\mathbf{p} \to 0$:

$$\Box(\dot{\mathbf{e}} - \mathrm{rot}\,\mathbf{b}) = -4\pi G(\ddot{\mathbf{s}} + \mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{s}), \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{e} + \dot{\mathbf{b}} = 0; \tag{6}$$
$$\Box\,\mathrm{div}\,\mathbf{e} = -4\pi G\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{s}}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{b} = 0.$$

Здесь $e_a = f_{0a}$, $e_{a\beta\gamma} b_\gamma = -f_{a\beta}$, $\mathbf{s} = {}^1\!/_2\, \psi^* \vec{\sigma} \psi$ – плотность спина. Гамильтониан спинорной частицы в тех же условиях равен

$$H = {}^1\!/_2\, \vec{\sigma}(\mathrm{rot}\,\mathbf{b} - \dot{\mathbf{e}}). \tag{7}$$

В статическом случае $\Delta\mathbf{b} = -4\pi G\,\mathrm{rot}\,\mathbf{s}$, т.е. спины взаимодействуют через поле $\mathrm{rot}\,\mathbf{b}$ как магнитные диполи через магнитное поле, но с неизвестной константой G.

Таким образом, предположение о полной относительности однозначно приводит к существованию безмассового голдстоуновского поля, которое в линейном приближении никак не проявляет себя в классике и единственным макроскопическим проявлением которого является наличие неэлектромагнитного дальнодействующего взаимодействия тел с неисчезающей средней плотностью спина. Простейшим экспериментом по обнаружению такого поля, в принципе, могло бы быть наблюдение прецессии намагниченности одного ферромагнетика в голдстоуновском поле другого, полностью электромагнитно экранированного от первого орбитальными (например, с сверхпроводящими) токами.

Отметим, наконец, что повышение температуры должно приводить, как и для других спонтанно нарушенных симметрий, к полному восстановлению обсуждаемой симметрии. Такое восстановление, возможное, например, на ранних стадиях горячей вселенной, должно сопровождаться, как ясно из изложенного, комплексизацией, т.е. удвоением размерности пространства-времени.

Литература

1. *Наймарк М.А.* Теория представлений групп. М.: Наука, 1976, стр.275.
2. *Isham C., Salam A., Strathdee J.* Ann. Phys., (N.Y.), 1971, **62**, 3.
3. *Волков Д.В.* ЭЧАЯ, 1973, **4**, 3.
4. *Борисов А.Б., Огиевецкий В.И.* ТМФ, 1974, **21**, 329.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
30 июня 1982 г.