*Письма в ЖЭТФ, том 36, вып. 3, стр. 99 – 101* *5 августа 1982 г.*

# СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ КОНФОРМНОЙ СИММЕТРИИ. АНОМАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ ИНСТАНТОНОВ И МЕРОНОВ

*М.Я.Пальчик, Е.С.Фрадкин*

Обсуждается роль квантовых поправок к инстантонным и меронным решениям в предположении, что их учет не меняет симметрии этих решений. Получены точные выражения для среднего поля в скалярной теории. Обсуждаются уравнения для входящих в них постоянных параметров.

Цель настоящей работы показать, что сумму всех радиационных поправок к инстантонным [1] и меронным [2] решениям можно найти методами конформной теории поля (см., например, [3,4]). При этом оказывается, что весь эффект радиационных поправок состоит в появлении аномальных размерностей. Для иллюстрации идеи метода мы рассмотрим теорию скалярного поля. Калибровочные теории будут рассмотрены отдельно.

Известно [5,2], что инстантонные и меронные решения получаются как результат спонтанного нарушения конформной симметрии. При этом остаточная симметрия в случае меронных решений есть максимальная компактная подгруппа $SO(4) \times SO(2)$ конформной группы, а в случае инстантонных решений (в евклидовом пространстве) – группа $SO(5)$, являющаяся подгруппой конформной группы $SO(5,1)$ евклидова пространства. В основе рассматриваемого подхода лежит предположение, что указанная симметрия классических решений сохраняется после суммирования радиационных поправок.

Пусть $\phi(x)$ – конформное поле с масштабной размерностью $d$

$$[\phi(x), P_\mu] = i\,\partial_\mu \phi(x), \qquad [\phi(x), M_{\mu\nu}] = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\phi(x),$$
$$[\phi(x), D] = i(x_\mu \partial_\mu + d)\,\phi(x), \qquad [\phi(x), K_\mu] = i[-x^2 \partial_\mu + x_\mu (x_\nu \partial_\nu + d)]\phi(x). \tag{1}$$

В случае спонтанно нарушенной симметрии среднее поле можно найти [5] из дифференциальных уравнений первого порядка, выражающих симметрию вакуума. Пусть $\Omega_1 - SO(4) \times SO(2$

инвариантный вакуум, соответствующий меронному решению:

$$\mathbf{M}\,|\,\Omega_1> \;=\; \mathbf{S}\,|\,\Omega_1> = R_0\,|\,\Omega_1> = 0\,. \tag{2}$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$ – генераторы группы $SO(4) \sim SO(3) \times SO(3)$, а $R_0$ – генератор $SO(2)$:

$$\mathbf{M} = (M_{23}, M_{31}, M_{12}), \quad \mathbf{S} = 1/2\left(a\mathbf{P} - \frac{1}{a}\mathbf{K}\right), \quad R_0 = 1/2\left(aP_0 + \frac{1}{a}K_0\right), \tag{3}$$

где $a$ – параметр с размерностью длины. Из (1) – (3) находим ($i = 1, 2, 3$):

$$\left(\frac{a^2 + x^2}{2}\,\partial_i - x_i x_\mu \partial_\mu - x_i\, d\right) B_1(x) = 0, \quad (x_i \partial_k - x_k \partial_i) B_1(x) = 0\,,$$

$$\left(-\frac{a^2 - x^2}{2}\,\partial_0 + x_0 x_\mu \partial_\mu + x_0 d\right) B_1(x) = 0.$$

Наиболее общее решение этих уравнений есть (при $a = 1$) :

$$B_1(x) = <\Omega_1|\phi(x)|\,\Omega_1> \;=\; \frac{b_1}{[(1 + t_+^2)(1 + t_-^2)]^{d/2}}\,, \tag{4}$$

где $b_1$ – константа, $t_\pm = x_0 \pm |\,\mathbf{x}_1\,|$.

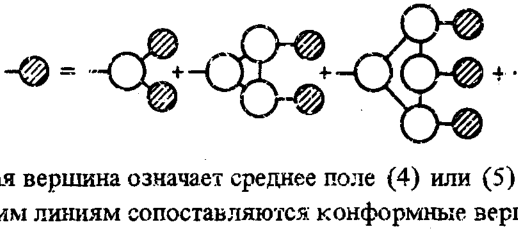
Рассмотрим инстантонное решение. Группа $SO(5)$ имеет 10 генераторов: $M_{\mu\nu}$ и $R_\mu = 1/2\left(aP_\mu + \frac{1}{a}K_\mu\right)$. Вводя $SO(5)$ симметричный вакуум $|\,\Omega_2>$, $M_{\mu\nu}\,|\,\Omega_2> = R_\mu\,|\,\Omega_2> = 0$, находим

$$B_2(x) = <\Omega_2\,|\,\phi(x)\,|\,\Omega_2> \frac{b_2}{(a^2 + x^2)^d}\,. \tag{5}$$

Существенно, что (4) и (5) есть наиболее общие выражения, совместимые с симметрией вакуума. Размерность $d$ может принимать любые действительные значения в интервале $d \geqslant 1$ (положительность). В пределе канонического значения $d = 1$ выражения (4) и (5) переходят в обычные классические инстанное и меронное решения [2,5]. Таким образом роль радиационных поправок сводится к изменению размерности от канонического значения $d = 1$ к некоторому аномальному значению $d > 1$.

Для вычисления этого значения заметим, что масштабная размерность характеризует трансформационные свойства поля $\phi(x)$ при конформных преобразованиях. Будучи характеристикой оператора поля, она не зависит от свойств менее симметричных вакуумов $\Omega_1$ и $\Omega_2$. Поэтому для ее вычисления достаточно рассмотреть сектор, связанный с конформно-инвариантным вакуумом (не обязательно устойчивым). Таким образом размерность $d$ можно вычислить из обычной бутстрапной программы [6] конформной теории см. также [3,4] (ее решение для ряда взаимодействий 3-й и 4-й степени получено в [3,7]).

Значения констант $b_1$ и $b_2$ можно вычислить из скелетных уравнений для среднего поля. В качестве примера рассмотрим простейшее тройное взаимодействие



(6)

где заштрихованная вершина означает среднее поле (4) или (5), а незаштрихованным вершинам и внутренним линиям сопоставляются конформные вершины и пропагаторы, точный вид которых известен [8]. Вместо (6) можно использовать замкнутую форму уравнений, в которой выполнено суммирование по внешнему полю. Мы рассмотрим ее в другой работе. Существенно, что симметрия каждого графа в (6) совпадает с симметрией среднего поля, так как внутренние интегрирования конформно-инвариантны. В результате координатная зависимость каждого графа такая же как в левой части. Сокращая эту зависимость получим алгебраическое уравнение для $b_1$ или $b_2$.

Интересное применение рассмотренного подхода возможно в теориях, где конденсат описывается квадратичными комбинациями поля. Авторы проверили, что в модели Тирринга существует и может быть получено таким методом точное решение меронного типа, для которого $< \Omega_2 | j_\mu(x) | \Omega_2 > \neq 0$, но $< \Omega_2 | \psi(x) | \Omega_2 > = 0$, где $j_\mu(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ – сохраняющийся ток. Аналогичные решения возможны в электродинамике.

**Литература**


1. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu. S.* Phys. Lett., 1975, **59B**, 85.
2. *De Alfaro V., Fubini S., Furlan G.* Phys. Lett. 1976, **65B**, 163.
3. *Fradkin E.S., Palchik M.Ya.* Phys. Rep. 1978, **44**, 249.
4. *Todorov I.T., Mintchev M.G., Petkova V.B.* Conformal Invariance in Quantum FieldTheory, Scula Normale Superiore, Piza, 1978.
5. *Fubini S.* Nuovo Cim. 1976, **34A**, 521.
6. *Migdal A.A.* Phys. Lett., 1971, **37B**, 386; *Parizi G., Peliti L.* Lett., Nuovo Cim. 1971, **2**, 627.
7. *Fradkin E.S., Palchik M.Ya., Zaikin V.N.* J. Phys., 1980, **A13**, 3429; ДАН СССР, 1981, **258**, 240.
8. *Поляков А.М.* Письма в ЖЭТФ, 1970, **12**, 538; *Migdal A.A.* Phys. Lett., 1981, **37B**, 98.



**Физический институт**
**им. П.Н. Лебедева**
**Академии наук СССР**



**Поступила в редакцию**
**11 июня 1982 г.**