Письма в ЖЭТФ, том 36, вып. 4, стр. 115 – 118 *20 августа 1982 г.*

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КВАЗИОДНОМЕРНОЙ КВАНТОВОЙ МОДЕЛИ СВЕРХЫЗЛУЧЕНИЯ ДИКЕ

В.И.Рупасов

Методом квантовой обратной задачи рассеяния показано, что квазиодномерная квантовая модель теории сверхызлучения является точно интегрируемой. Получены коммутационные соотношения для элементов матрицы перехода и найдены собственные функции и собственные значения интегралов движения модели.

1. В 1954 г. Дике[1] был предсказан эффект коллективного спонтанного излучения системой двухуровневых атомов, взаимодействующих через поперечное электромагнитное поле (сверхызлучение (СИ) Дике).

В настоящее время для описания СИ протяженных систем с большими числами Френеля $F = S/l\lambda_0 \gg 1$ (S – площадь поперечного сечения образца, l – его длина и λ_0 – характерная длина волны излучения) широко используется система уравнений Блоха – Максвелла для медленных огибающих напряженности электрического поля $\epsilon(x,t)$, поляризации $p(x,t)$ и населенности $n(x,t)$[2] (см. также обзор[3] и цитированную там литературу). В обезразмеренных переменных ($\hbar = c = l/N_0 = 1$, где N_0 – полное число двухуровневых атомов) эта система уравнений имеет вид:

$$i(\epsilon_t + \epsilon_x) = -\sqrt{\kappa}\, p, \qquad ip_t = \sqrt{\kappa}\, \epsilon n$$
$$in_t = 2\sqrt{\kappa}(\epsilon^+ p - p^+ \epsilon), \qquad \kappa = 2\pi\omega_{12} d^2/S, \tag{1}$$

где ω_{12} – частота, а d – дипольный момент перехода атома. При этом считается, что переменные ϵ, p и n являются классическими функциями, а учет квантовых эффектов, принципиально необходимый для описания спонтанных процессов излучения, производится путем введения в уравнение для функции $p(x,t)$ источника флуктуаций ξ_p. Известно также[4], что классические уравнения (1) (без источника флуктуаций ξ_p) допускают точное решение задачи Коши методом обратной задачи рассеяния[5].

В настоящей работе мы будем рассматривать величины ϵ, p, n как операторы с коммутационными соотношениями при совпадающих временах:

$$[\epsilon(x), \epsilon^+(y)] = \delta(x-y), \qquad [p(x), n(y)] = 2p(x)\delta(x-y)$$
$$[p^+(x), p(y)] = n(x)\,\delta(x-y), \qquad [n(x), p^+(y)] = 2p^+(x)\,\delta(x-y) \tag{2}$$

и покажем здесь, что и в квантовом случае операторные эволюционные уравнения Блоха – Максвелла (1) и коммутационные соотношения (2) определяют гамильтонову систему, которая является точно интегрируемой.

2. Применим к системе (1), (2) метод квантовой обратной задачи рассеяния, развитый в[6-10] для ряда точно решаемых моделей квантовой теории поля. Введем в рассмотрение двухкомпонентное фермионное поле $\psi_\nu(x)$, $\nu = 1,2$, связанное с операторами $p(x)$, $n(x)$ соотношениями:

$$p(x) = \psi_1^+(x)\,\psi_2(x), \qquad n(x) = \psi_2^+(x)\,\psi_2(x) - \psi_1^+(x)\,\psi_1(x). \tag{3}$$

Операторы ψ_ν^+ (ψ_ν) являются по существу полевыми операторами рождения (уничтожения) электрона в нижнем ($\nu = 1$) и верхнем ($\nu = 2$) состояниях двухуровневого атома и связаны между собой условием полноты: $\psi_2^+(x)\,\psi_2(x) + \psi_1^+(x)\,\psi_1(x) = 1$.

Рассмотрим вспомогательную квантовую спектральную задачу на конечном интервале $-L \leqslant x \leqslant L$:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,\lambda) = :Q(x,\lambda)\Phi(x,\lambda): \tag{4}$$

где матрица $Q(x,\lambda)$ имеет вид:

$$Q = i\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\kappa}{\lambda}\right) & \sqrt{\kappa}\,\epsilon^{+} \\ \sqrt{\kappa}\,\epsilon & -\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\kappa}{\lambda}\right) \end{pmatrix} + \frac{i\kappa}{\lambda}\begin{pmatrix} \psi_2^{+}\psi_2 & \psi_2^{+}\psi_1 \\ \psi_1^{+}\psi_2 & -\psi_2^{+}\psi_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а символ $::$ означает нормальное упорядочение операторов в (4). Определим матрицу $G(x,\lambda)$ как решение (4), удовлетворяющее граничному условию $G(x=-L,\lambda)=I$, где I – единичная матрица. Тогда матрица перехода для конечного интервала есть по определению $T_L(\lambda) = G(x=L,\lambda)$. Метод квантовой обратной задачи позволяет установить коммутационные соотношения для элементов матрицы $T_L(\lambda)$:

$$R_L(\lambda,\mu)T_L(\lambda)\otimes T_L(\mu) = T_L(\mu)\otimes T_L(\lambda)R_L(\lambda,\mu), \tag{6}$$

где, как показывают соответствующие вычисления, матрица $R_L(\lambda,\mu)$ в нашей модели полностью совпадает с R_L-матрицей в модели нелинейного уравнения Шредингера ($N.S.$ модель) [6-10]. Такое совпадение сохраняется и при переходе к задаче на бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$, где коммутационные соотношения по-прежнему имеют вид (6) а матрицы $T(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ можно написать в виде

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A^{+}(\lambda) & B(\lambda) \\ -B^{+}(\lambda) & A(\lambda) \end{pmatrix} \qquad R(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu-i\kappa}, \qquad \gamma = \frac{\lambda-\mu+i\kappa}{\lambda-\mu+i\delta}, \quad \delta \to +0. \tag{7}$$

Существование R-матрицы и полученные с ее помощью коммутационные соотношения для элементов матрицы перехода доказывают, что квантовая модель теории СИ (1), (2) допускает преобразование от локальных полей $\epsilon(x)$, $\psi_\nu(x)$ к переменным типа действие – угол $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ и, следовательно, является точно интегрируемой, причем перестановочные соотношения для элементов T-матрицы в нашей модели и модели $N.S.$ полностью совпадают.

3. Перейдем теперь к рассмотрению собственных функций и собственных значений коммутирующих интегралов движения модели. Как и обычно в методе обратной задачи [6-10], оператор $A(\lambda)$ не зависит от времени, а оператор $\ln A(\lambda)$, являющийся производящей функцией интегралов движения системы, может быть представлен в виде ряда по обратным степеням спектрального параметра $(i\lambda)$

$$\ln A(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (i\lambda)^{-n}, \tag{8}$$

где коэффициенты a_n являются коммутирующими интегралами движения модели и, в частности,

$$a_1 = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} dx\,[e^+(x)\,\epsilon(x) + \psi_2^+(x)\,\psi_2(x)] \equiv \kappa N, \tag{9}$$

$$a_2 = i\kappa\,\{ i \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\epsilon^+(x)\,\partial_x\,\epsilon(x) + \kappa \int_{-\infty}^{\infty} dx\,[\psi_1^+(x)\,\epsilon^+(x)\,\psi_2(x) +$$

$$+ \psi_2^+(x)\,\epsilon(x)\,\psi_1(x)]\} \equiv -i\kappa H. \tag{10}$$

Оператор N является оператором числа квазичастиц, а H — гамильтониан модели. Одночастичное состояние $|\Psi(\mu)\rangle$ порождается действием оператора $B(\mu)$ на вакуум $|0\rangle$, под которым мы здесь понимаем отсутствие фотонов и нахождение всех двухуровневых атомов в основном состоянии. Из соотношений коммутации (6), (7) и формул (8) — (10) находим

$$N\,|\Psi(\mu)\rangle = |\Psi(\mu)\rangle, \quad H\,|\Psi(\mu)\rangle = -\mu\,|\Psi(\mu)\rangle, \tag{11}$$

откуда ясно, что параметр $\omega = -\mu$ является энергией одночастичного состояния. Сохраняя в операторе $B(\mu)$ только члены дающие ненулевое значение при действии на вакуум имеем:

$$|\Psi(\mu)\rangle = B(\mu)\,|0\rangle = i\sqrt{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} \left[\epsilon^+(x) + \frac{\sqrt{\kappa}}{\mu}\,\psi_2^+(x)\,\psi_1(x) \right] |0\rangle, \tag{12}$$

где $k = \dfrac{\kappa}{\mu} - \mu$ играет роль импульса квазичастицы. Спектр одночастичного состояния состоит, как и следовало ожидать, из двух поляритонных ветвей:

$$\omega_1(k) = \frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \kappa}, \qquad \omega_2(k) = \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \kappa}. \tag{13}$$

Также как и в модели *N. S.* с притяжением, в нашей модели существует связанное состояние m-частиц

$$|\Psi_m(\mu)\rangle = B(\mu_1)\,B(\mu_2)\ldots B(\mu_m)\,|0\rangle, \tag{14}$$

где

$$\mu_l = \frac{\mu}{m} + i\kappa\left(\frac{m+1}{2} - l\right), \qquad \mu = \sum_{l=1}^{m} \mu_l, \quad l = 1, 2, \ldots, m. \tag{15}$$

Энергия связанного m-частичного комплекса, приходящаяся на одну частицу $\omega = -\mu / m$, связана с импульсом движения комплекса как целого на одну частицу

$$k = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\kappa}{\mu_l} - \mu_l \right)$$

дисперсионным соотношением

$$k = \omega \left[1 - \frac{\kappa}{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\omega^2 + \kappa^2 \left(\frac{m+1}{2} - l \right)^2} \right]. \tag{16}$$

Для достаточно больших $m \gg 1$ спектр связанного состояния (квантового солитона) является линейным $\omega = k$ с небольшой поправкой пропорциональной m^{-1}.

Именно это состояние, имеющее форму импульса с пространственным размером $r_0 \sim (\kappa m)^{-1}$ и следует сопоставить импульсу сверхызлучения Дике.

Автор выражает благодарность В.М.Аграновичу, И.В.Лернеру и В.И.Юдсону за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. *Dicke R.H.* Phys. Rev., 1954, **93**, 99.
2. *Mac Gillivray J.C., Feld M.S.* Phys. Rev., 1976, **A14**, 1169.
3. *Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А.* УФН, 1980, **131**, 653.
4. *Lamb Jr., G.L.* Phys. Rev. Lett., 1973, **31**, 196.
5. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
6. *Склянин Е.К., Фаддеев Л.Д.* ДАН СССР, 1978, **243**, 1430.
7. *Склянин Е.К.* ДАН СССР, 1979, **244**, 1337.
8. *Thacker H.B., Wilkinson D.* Phys. Rev., 1979, **D19**, 3660.
9. *Фаддеев Л.Д.* Препринт ЛОМИ Р-2-79, Л., 1979.
10. *Thacker H.B.* Rev. Mod. Phys., 1981, **53**, 253.

Институт спектроскопии
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 июня 1982 г.