НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ЯНГА – МИЛЛСА

Е.С.Николаевский, Л.Н.Щур

Для частного случая классических уравнений Янга – Миллса показано отсутствие дополнительного первого интеграла. Сделан вывод об отсутствии полного набора интегралов исходной системы уравнений.

1. Вопрос об интегрируемости классических уравнений Янга –Миллса (ЯМ) является исключительно важным как для классической, так и для квантовой теории поля. Интерес к этому вопросу повысился после работ [1,2]. В [1] показано, что уравнения самодуальности являются условием интегрируемости классических полей ЯМ и на основе этого результата в [3] построены многоинстантонные решения. В [2] обнаружено отсутствие стохастизации начального условия уравнения Клейна – Гордона с кубической нелинейностью – специального случая поля ЯМ. Другим интересным фактом является нетривиальная аналогия между полем ЯМ и n-полем [4]. Обе теории перенормируемы, в них имеет место асимптотическая свобода, инстантонные решения. В то же время уравнения n-поля являются интегрируемой системой. Эти соображения позволяли надеяться, что уравнения ЯМ также интегрируемы. В данной работе мы покажем, напротив, что система уравнений, описывающая классические поля ЯМ, является неинтегрируемой.

В классическом случае интегрируемость означает наличие интегралов движения, скобка Пуассона которых с интегралом энергии обращается в ноль, что позволяет, в принципе, получить решения. Из интегрируемости классической задачи следует интегрируемость квантовой [5] в смысле существования полного набора коммутирующих операторов.

2. Уравнения Янга – Миллса имеют вид

$$\partial_\mu F^a_{\mu\nu} + g\,\epsilon^{abc} A^b_\mu F^c_{\mu\nu} = 0\,, \qquad (1)$$

где $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^b_\mu + g\,\epsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$. $(\mu,\ \nu = 0, 1, 2, 3;\ a,\ b,\ c = 1, 2, 3)$.

Здесь A^a – элементы произвольной алгебры Ли; в дальнейшем мы рассматриваем случай алгебры $SU(2)$, так что A_μ можно отождествить с векторами в трехмерном изотопическом пространстве. Уравнение (1) допускает подстановку вида [7]

$$A_0^a = 0\ ,\ \ \partial_i A_j^a = 0,\ \ A_i^a = O_i^a f^a\ ,\ \ x = f^1\ ,\ \ y = f^2\ ,\ \ f^3 = 0 \tag{2}$$

(где O_i^a –постоянные ортогональные матрицы $O_i^a O_i^b = \frac{1}{g^2}\,\delta^{ab}$), после чего сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} + x\,y^2 = 0\ ,\quad \ddot{y} + x^2 y = 0\ ;\quad \cdot \equiv \partial / \partial t\ . \tag{3}$$

Эта система имеет очевидный интеграл движения

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 y^2)\ . \tag{4}$$

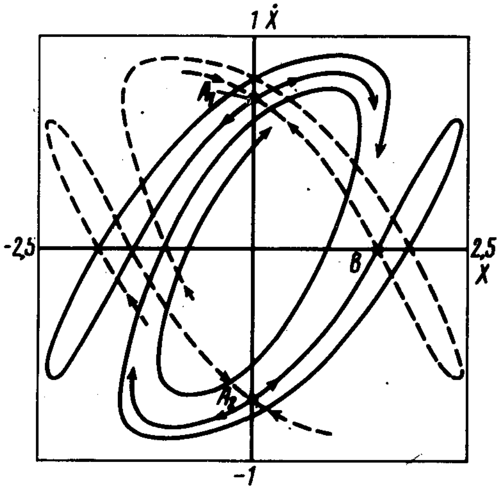
Подчеркнем, что подстановка (2) проходит через уравнение (1). Поэтому из факта отсутствия интеграла системы (3) будет немедленно следовать отсутствие полного набора интегралов у исходной системы, т.е. ее неинтегрируемость.

Отсутствие дополнительного к (4) интеграла движения может быть проверено с помощью ЭВМ. Поясним суть используемого метода.

Фиксированное значение интеграла определяет в четырехмерном пространстве $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ трехмерную гиперповерхность. Построим сечение Пуанкаре этого пространства [7]. Рассечем его полуплоскостью, например, $y = 0$, $\dot{y} > 0$. Предположим, что система (3) имеет дополнительный интеграл I_1 . Зафиксируем его значение. Пересечением трехмерных гиперповерхностей, определяемых $E = \text{const}$ и $I_1 = \text{const}$, является двумерная поверхность. В свою очередь, пересечением этой поверхности с секущей полуплоскостью (ПП) является замкнутая кривая (лежащая в ПП). Различным значением I_1 при фиксированном значении E соответствуют различные замкнутые кривые. При фиксированных обоих значениях интегралов все траектории системы будут пересекать ПП по одной и той же кривой. Периодическое решение задает замкнутые кривые в фазовом пространстве. Эти траектории „протыкают" ПП в конечном числе точек N. Траектория, начавшись из точки полуплоскости A_0, через N пересечений (или, что то же самое, через период решения T) возвратится в точку A_0. Таким образом, точка A_0 – неподвижная точка соответствующего отображения ПП на себя.

Линеаризованная вблизи замкнутой траектории система уравнений (3) характеризуется матрицей A^T отображения окрестности неподвижной точки на себя за период T периодического решения [8]. Собственные значения этой матрицы, матрицы монодромии, определяют поведение точек, близких к неподвижной. В силу теоремы Лиувилля из наличия интеграла (4) следует, что $\det\ A^T = 1$. При этом произведение собственных значений матрицы равно единице $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Нас будет интересовать случай вещественных собственных значений. В этом случае точка A_0 является гиперболической или неустойчивой. Через нее проходит пара кривых, называемых устойчивой и неустойчивой сепаратрисами. По устойчивой сепаратрисе траектории при $t \to \infty$ пересекают ПП, приближаясь к точке A_0, а по неустойчивой – отходя (и наоборот при $t \to -\infty$). В окрестности гиперболической точки A_0 сепаратрисы определяются собственными векторами матрицы монодромии.

Выше мы указали, что при наличии дополнительного интеграла все кривые в ПП замкнуты. Поэтому неустойчивая и устойчивая сепаратрисы переходят друг в друга, образуя замкнутую кривую. Если же сепаратрисы пересекаются под ненулевым углом (трансверсально), то это приводит к отсутствию дополнительного интеграла у системы [7]. При этом сепаратрисы будут пересекаться бесчисленное множество раз, сильно осциллируя и проходя сколь угодно близко от неподвижной точки, но никогда не входя в нее, и сепаратрисы не замыкаются.



Сечение фазового пространства полуплоскостью $y = 0$, $\dot{y} > 0$. Сплошные линии – неустойчивые сепаратрисы точек A_1 и A_2, пунктирные – устойчивые сепаратрисы. B – одна из точек пересечения сепаратрис. $E = 1/2$

Таким образом, для выяснения вопроса о наличии дополнительного интеграла достаточно найти неустойчивые решения системы (3) и изучить поведение сепаратрис в ПП.

3. Система (3) имеет тривиальные периодические решения

$$x = y = +F, \quad x = -y = -F, \tag{5 ±}$$

где $F = cn(t, 1/\sqrt{2})$ – эллиптический косинус Якоби. В полуплоскости с координатами $(x, \dot{x})$ решения (5±) имеют неподвижные точки A_1 $(0; 1/\sqrt{2})$ и A_2 $(0; -1/\sqrt{2})$, соответственно. Матрица монодромии A^T в окрестности этих точек одинакова, собственные значения ее вещественны $\lambda_1 = 129,647014$; $\lambda_2 = 1/\lambda_1$. Таким образом, точки A_1 и A_2 – гиперболические, а решения (5 ±) неустойчивы. Построенные с помощью ЭВМ сепаратрисы представлены на рисунке; они пересекаются трансверсально и не совпадают. Угол пересечения сепаратрис в точке B (1,424923827847; 0) в плоскости, перпендикулярной траектории этой точки, составляет примерно 72°. Факт пересечения сепаратрис является доказательством отсутствия у системы (3) дополнительного интеграла и отсутствия полного набора интегралов у исходной системы уравнений Янга – Миллса (1).

Заметим, что в [9] доказана теорема об отсутствии дополнительного интеграла системы (3) в предположении об его аналитической продолжимости в плоскость комплексного переменного на полосу конечной ширины. Это предположение является сильным, накладывает существенные ограничения на вид интеграла и не закрывает вопроса. Нами обнаруженное явление пересечения сепаратрис запрещает существование дополнительного интеграла без каких-либо ограничений физического характера на его вид.

Авторы благодарны Е.Б.Богомольному и Я.Г.Синаю за активное участие в обсуждении работы на всех этапах ее выполнения и А.А.Белавину, В.Е.Захарову, С.П.Новикову и Э.И.Рашба за полезные обсуждения.

Литература

1. *Белавин А.А., Захаров В.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1977, **25**, 603.
2. *Atiyah M., Ward R.* Comm. Math. Phys., 1977, **55**, 117; *Захаров В.Е., Иванов М.Ф., Щур Л.Н.* Письма в ЖЭТФ, 1979, **30**, 39.
3. *Atiyah M., Hitchin N., Drinfeld V., Manin Yu.* Oxford preprint, 1978.
4. *Polyakov A.M.* Nucl. Phys., 1980, **B164**, 1971.
5. *Korsch H.J.* Phys. Lett., 1982, **90A**, 113.
6. *Басеян Г.З., Матинян С.Г., Саввиди Г.К.* Письма в ЖЭТФ, 1979, **29**, 641.
7. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1972, 2, гл. XXXIII.

8. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
9. *Зиглин С.Л.* Функциональный анализ, 1982, вып. 3, 30.

Институт теоретической и экспериментальной физики

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5 августа 1982 г.