

Самосогласованное расширение многокомпонентной плазмы в вакуум

А. А. Иванов¹⁾, К. С. Серебrenников¹⁾

Российский научный центр “Курчатовский Институт”, 123182, Москва Россия

Поступила в редакцию 23 марта 2003 г.

После переработки 26 июня 2003 г.

Рассмотрена задача об одномерном бесстолкновительном расширении многокомпонентной плазмы в вакуум. В гидродинамическом приближении найдено приближительное аналитическое решение для произвольного набора ионов с массами M_1, \dots, M_n и зарядами Z_1e, Z_2e, \dots, Z_ne . Решение базируется на методе автоматических переменных, использованным Гуревичем, Парийской и Питаевским для случая одного сорта ионов. Построен численный итеративный алгоритм, использующий аналитическое решение в качестве первого приближения.

PACS: 29.25.Ni, 52.30.-q, 52.50.Dg, 52.70.La

Задача об одномерном расширении плазмы в вакуум в гидродинамической постановке является классической задачей физики плазмы, когда температура электронов значительно превышает ионную. Гуревич, Парийская и Питаевский в пионерских работах [1] получили самосогласованное аналитическое решение для одного сорта ионов. Авторы использовали метод введения автоматической переменной, развитый в гидродинамике идеальной жидкости [2], позволивший уменьшить общее количество переменных. При решении использовалось приближение квазинейтральности и изотермичности электронов. В работе [3] было дано обобщение на случай примесных ионов. Кров и др. [4] аналитически и численно исследовали ускорение ионов на фронте расширяющейся плазмы, где уже не справедливо приближение квазинейтральности. Было показано, что ионы неограниченно ускоряются, а позади фронта в основном выполнено автоматическое решение из [1]. Мора и Пеллат [5] нашли аналитические поправки при учете остывания электронов вблизи фронта за счет передачи энергии на ускорение ионов. Чан и др. [6] (см. также ссылки в статье) экспериментально проверили, что позади ионного фронта потенциал хорошо описывается автоматическим решением из [1] до того, как начинают сказываться эффекты ограниченной геометрии.

Иванов и др. [7–9] показали, что распространение пространственно локализованной группы горячих электронов в плазму также является автоматическим. Основываясь на подходе из работы [10], Иванов, Бакал и др. [11, 12] разработали самосогласованную кинетическую теорию релаксации квазинейтральной

плазмы отрицательных ионов низкого давления. Решение было найдено для случая, когда два сорта ионов (отрицательные и положительные) имеют сравнимые плотности.

Ковалев и др. [13], используя аппарат групповых методов, нашли аналитическое решение для разлета плазменного сгустка в кинетической постановке. Причем авторы использовали только приближение квазинейтральности.

В настоящее время, в связи с развитием физики и техники источников многозарядных ионов [14], приобрела значительный интерес задача о расширении многокомпонентной плазмы, когда каждая компонента многократно ионизована [15, 16].

1. Модель и базовые уравнения. Рассмотрим задачу об одномерном расширении многокомпонентной плазмы в вакуум. Плазма состоит из электронов и ионов с зарядами Z_1e, Z_2e, \dots, Z_ne и массами M_1, \dots, M_n . Плазма однородна и в начальный момент времени находится в левой полуплоскости, $x < 0$. Такая ситуация характерна, например, для плазмы на электронном циклотронном разряде в пробке магнитной ловушки в момент выключения внешнего СВЧ поля. Температура электронной компоненты T_e , как правило, значительно выше ионной температуры и можно воспользоваться приближением холодной гидродинамики для ионов:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N_k v_k) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{Z_k e}{M_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Здесь N_k, v_k – концентрация и средняя скорость k -й ионной компоненты, φ – электростатический потен-

¹⁾e-mail: ivanov@ard.kiae.ru, kss@ard.kiae.ru

циал, вызванный разделением зарядов. Электроны двигаются намного быстрее ионов и успевают прийти в квазистационарное термодинамическое равновесие. Для получения аналитического решения будем считать, что электроны имеют максвелловскую функцию распределения при $x \rightarrow -\infty$. Тогда их пространственное распределение описывается распределением Больцмана

$$N_e = N_0 \exp(e\varphi/T_e). \quad (3)$$

За исключением крайне правой области (фронт), где электронная плотность превышает ионную, справедливо уравнение квазинейтральности:

$$\sum_{k=1}^n Z_k N_k = N_e. \quad (4)$$

Как показано в [1, 17], решение системы уравнений холодной гидродинамики можно искать в автомодельном виде, поскольку начальные условия не содержат пространственного масштаба. В нашем случае может быть несколько различных скоростей ионного звука $C_{sk} = \sqrt{T_e/M_k}$, однако начальные и граничные условия одинаковы для всех сортов ионов. Введем нормированную автомодельную переменную $\xi = \frac{x}{t} \sqrt{\frac{M_1}{T_e}}$ и будем считать, что все переменные зависят только от ξ . Будем пользоваться безразмерными переменными

$$u_k = \frac{v_k}{\bar{v}_s}; \quad \bar{v}_s = \sqrt{\frac{T_e}{M_1}}; \quad \psi = \frac{e\varphi}{T_e}; \quad n_k = \frac{N_k}{N_0},$$

в которых уравнения (1)–(4) принимают следующий вид:

$$(u_k - \xi) \frac{dn_k}{d\xi} + n_k \frac{du_k}{d\xi} = 0, \quad (5)$$

$$(u_k - \xi) \frac{du_k}{d\xi} + A_k \frac{d\psi}{d\xi} = 0, \quad (6)$$

$$\psi = \ln \left(\sum Z_k n_k \right), \quad (7)$$

где $A_k = Z_k M_1 / M_k$. Система уравнений (5)–(7) имеет тривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям в левой полуплоскости ($x < 0, t \rightarrow 0, \xi \rightarrow -\infty$):

$$\psi = 0, \quad n_k = n_k^0, \quad u_k = 0, \quad \sum Z_k n_k^0 = 1. \quad (8)$$

Однако это решение не удовлетворяет граничным условиям в правой полуплоскости ($x > 0$), где при $t = 0$, или $\xi \rightarrow \infty$ должны отсутствовать частицы – $n_k = 0$. В общем случае, условие существования нетривиального решения получается приравнением

нулю детерминанта матрицы, составленной из коэффициентов при производных по ξ в (5), (6). Однако это можно сделать проще. Подставляя $\psi(\xi)$ из (7) в (6), получаем

$$\frac{du_k}{d\xi} = - \frac{A_k}{(u_k - \xi)} \frac{\sum Z_i (dn_i/d\xi)}{\sum Z_i n_i}.$$

Последний результат следует подставить в (5):

$$\frac{dn_k}{d\xi} = - \frac{A_k n_k}{(u_k - \xi)^2} \frac{\sum Z_i (dn_i/d\xi)}{\sum Z_i n_i},$$

что для нетривиального случая $\sum Z_i (dn_i/d\xi) \neq 0$ окончательно дает после суммирования по k следующее условие согласования:

$$\sum \frac{Z_k A_k n_k}{(u_k - \xi)^2} = \sum Z_k n_k. \quad (9)$$

Тривиальное решение при $t > 0$ имеет место в левой области, еще не затронутой процессом расширения плазмы. Оба решения сшиваются при некотором ξ_0 , чтобы удовлетворить всем граничным условиям, причем полученное решение имеет разрыв производной в точке сшивки. Система уравнений (5)–(7) с дополнительным условием (9) является нелинейной, и нахождение точного аналитического решения представляется трудновыполнимой задачей. Однако как показано в [1], в одном простом случае аналитическое решение легко находится. Для одного сорта ионов, когда $n_k = n_1 \delta_{1,k}$, $u_k = u_1 \delta_{1,k}$ и $A_k = Z_1 \delta_{1,k}$, условие (9) имеет простой вид и фактически само дает решение

$$(u_1 - \xi)^2 = Z_1 \quad (10)$$

или

$$u_1 = \xi + \sqrt{Z_1}. \quad (11)$$

Подставляя полученный результат в уравнение (5) для $k = 1$, легко получить

$$n_1 = \text{const} \cdot \exp(-\xi/\sqrt{Z_1} - 1).$$

Точка сшивки ξ_0 , а также константа находятся из условия согласования. А именно, при $\xi = \xi_0$, $u_1(\xi) = 0$, $n_1(\xi) = 1/Z_1$, следовательно, $\xi_0 = -\sqrt{Z_1}$ и

$$n_1 = \frac{1}{Z_1} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{Z_1}} - 1\right). \quad (12)$$

При $\xi < \xi_0$ справедливо тривиальное решение $u_1(\xi) = 0$, $n_1(\xi) = 1/Z_1 = \text{const}$. И, наконец, из уравнения (7) находится выражение для нормированного потенциала

$$\psi = -\xi/\sqrt{Z_1} - 1. \quad (13)$$

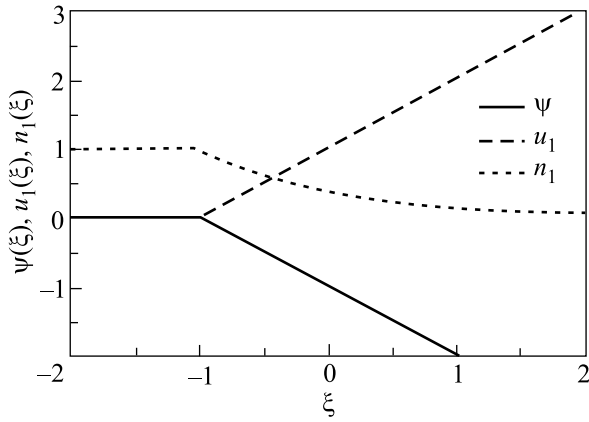


Рис.1. Функции $u_1(\xi)$, $n_1(\xi)$, $\psi(\xi)$ при $Z_1 = 1$. Точка сшивки $\xi_0 = -1$

На рис.1 представлено решение для одного сорта ионов при $Z_1 = 1$. Следует отметить, что скачок электрического поля в реальном пространстве движется влево со скоростью ионного звука. Попытка найти решение для двух сортов ионов в [3] ограничилась линейным приближением, когда отношение n_2/n_1 рассматривается как малый параметр.

2. Приближение линейного потенциала. По аналогии со случаем одного сорта ионов будем искать приближенное решение в предположении, что потенциал линейно зависит от ξ при $\xi > \xi_0$ и равен нулю при $\xi < \xi_0$. В области нетривиального решения запишем

$$\psi = \bar{\psi} = -p\xi - 1. \quad (14)$$

Здесь p может зависеть от зарядов и масс всех ионов. Точка сшивки связана с параметром p простым соотношением $p = -1/\xi_0$, так как потенциал равен нулю слева от ξ_0 . Отметим, что точка сшивки, очевидно, одна для всех сортов ионов k . Уравнения (5), (6) принимают вид

$$\frac{d \ln n_k}{d\xi} = -\frac{1}{u_k - \xi} \frac{du_k}{d\xi}; \quad (15)$$

$$(u_k - \xi) \frac{du_k}{d\xi} = A_k p. \quad (16)$$

Последнее уравнение является частным случаем уравнения Абеля второго рода и может быть решено точно [18]. Сначала заметим, что система уравнений (14)–(16) имеет точный интеграл. В самом деле, рассмотрим производную

$$\frac{d \ln(u_k - \xi)}{d\xi} = \frac{1}{(u_k - \xi)} \frac{du_k}{d\xi} - \frac{1}{(u_k - \xi)}$$

и выразим здесь последнее слагаемое из (16)

$$\frac{1}{(u_k - \xi)} \frac{du_k}{d\xi} = \frac{d \ln(u_k - \xi)}{d\xi} + \frac{1}{A_k p} \frac{du_k}{d\xi}.$$

Подставляя теперь левую часть из (15) и интегрируя, находим

$$\ln(u_k - \xi) + \frac{1}{A_k p} u_k + \ln n_k = \text{const}. \quad (17)$$

Из граничных условий $\xi = \xi_0$, $u_k = 0$, $n_k = n_{k0}$ получаем значение для константы в правой части (17) $\text{const} = \ln(n_{k0}) + \ln(-\xi_0)$ и окончательно

$$n_k = n_{k0} \frac{-\xi_0}{u_k - \xi} \exp\left(-\frac{u_k}{A_k p}\right). \quad (18)$$

Таким образом, в рамках предположения (14) мы нашли точное решение, связывающее плотность и скорость k -го сорта ионов. Теперь необходимо найти явную зависимость u_k от ξ . Сделаем это, заметив, что уравнение (16) (уравнение Абеля второго рода) допускает частное решение вида

$$g_k(\xi) = \xi + A_k p. \quad (19)$$

Если бы мы рассматривали случай одного сорта ионов, то это решение и было бы искомым (см. (11)). Однако это не так в нашем случае. Более того, точка ξ , в которой $g_k(\xi) = 0$, зависит от k . Таким образом, это решение не удовлетворяет граничным условиям. Будем искать решение в виде

$$u_k(\xi) = g_k(\xi) + \bar{u}_k(\xi) = \xi + A_k p + \bar{u}_k(\xi); \quad (20)$$

$$\bar{u}_k(\xi_0) = -(\xi_0 + A_k p).$$

Такой выбор позволяет удовлетворить граничным условиям в точке сшивки. Подставим (20) в (16):

$$(\xi + A_k p + \bar{u}_k - \xi) \left(1 + \frac{d\bar{u}_k}{d\xi}\right) = A_k p; \quad \frac{d\bar{u}_k}{d\xi} = -\frac{\bar{u}_k}{A_k p + \bar{u}_k}.$$

Решением его является алгебраическое трансцендентное уравнение

$$\bar{u}_k - \bar{u}_k^0 + A_k p \ln \frac{\bar{u}_k}{\bar{u}_k^0} = -(\xi - \xi_0), \quad (21)$$

где $\bar{u}_k^0 = \bar{u}_k(\xi_0)$. Если построить теперь функцию $\xi = \xi(\bar{u}_k)$ с помощью (21) и поменять оси, то получим искомое решение

$$u_k(\xi) = \xi + A_k p + \bar{u}_k(\xi) = \bar{u}_k(\xi) - \bar{u}_k^0 + \xi - \xi_0 \quad (22)$$

для скорости ионов сорта k . В (22) неизвестно пока только значение ξ_0 , которое легко найти из (9), подставляя $\xi = \xi_0$, $u_k(\xi_0) = 0$, $n_k(\xi_0) = n_{k0}$:

$$\sum \frac{Z_k A_k n_{k0}}{(-\xi_0)^2} = \sum Z_k n_{k0}; \quad (-\xi_0) = \sqrt{\frac{\sum Z_k A_k n_{k0}}{\sum Z_k n_{k0}}}. \quad (23)$$

Решение (21) можно также представить через функцию G , обратную к $x e^x$:

$$\tilde{u}_k(\xi) = A_k p \cdot G \left[\frac{\tilde{u}_k^0}{A_k p} \cdot \exp \left(-\frac{g_k(\xi)}{A_k p} \right) \right].$$

Рассмотрим предельные случаи. Вблизи точки ξ_0 , где выполнено $\xi - \xi_0 \ll |\xi_0|$, согласно уравнению (21) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k - \tilde{u}_k^0 + A_k p \ln \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_k^0} &= \Delta \tilde{u}_k + A_k p \ln \left(1 + \frac{\Delta \tilde{u}_k}{\tilde{u}_k^0} \right) \approx \\ &\approx \Delta \tilde{u}_k \cdot \left(1 + \frac{A_k p}{\tilde{u}_k^0} \right) = -\frac{\xi_0}{\tilde{u}_k^0} \Delta \tilde{u}_k \approx -(\xi - \xi_0) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u_k(\xi) = \Delta \tilde{u}_k + \xi - \xi_0 &\approx -(\xi - \xi_0) \left(1 + \frac{A_k p}{\xi_0} \right) + (\xi - \xi_0) = \\ &= \frac{(\xi - \xi_0)}{(-\xi_0)} A_k p, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} n_k &= n_{k0} \frac{-\xi_0}{u_k - \xi} \exp \left(-\frac{u_k}{A_k p} \right) \approx \\ &\approx n_{k0} \frac{-\xi_0}{\Delta \tilde{u}_k - \xi_0} \exp \left(-\frac{\xi - \xi_0}{(-\xi_0)} \right) \approx \\ &\approx n_{k0} \cdot \left(1 + \frac{\Delta \tilde{u}_k}{\xi_0} \right) \left(1 - \frac{(\xi - \xi_0)}{(-\xi_0)} \right) \approx \\ &\approx n_{k0} \left(1 - A_k p \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Исследуем случай больших положительных ξ . Перепишем сначала уравнение (21) в более удобном виде, используя (22):

$$A_k p \ln \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_k^0} = -(\tilde{u}_k - \tilde{u}_k^0) - (\xi - \xi_0),$$

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_k^0 \exp \left(-\frac{u_k}{A_k p} \right).$$

Предположим, что при $\xi \gg 1$ $u_k = g_k + \tilde{u}_k \approx g_k = \xi + A_k p \gg \tilde{u}_k$. В самом деле, тогда при больших ξ получим

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_k^0 \exp \left(-\frac{g_k}{A_k p} \right) = \tilde{u}_k^0 \exp \left(-\frac{\xi}{A_k p} - 1 \right) \ll \tilde{u}_k^0$$

и наше предположение, что можно пренебречь \tilde{u}_k , выполнено:

$$u_k = g_k + \tilde{u}_k \approx g_k = \xi + A_k p. \quad (26)$$

Согласно (18), для концентраций находим

$$n_k = n_{k0} \frac{-\xi_0}{u_k - \xi} \exp \left(-\frac{u_k}{A_k p} \right) \approx$$

$$\approx n_{k0} \frac{1}{A_k p^2} \exp \left(-\frac{\xi}{A_k p} - 1 \right). \quad (27)$$

Отсюда следует, что при больших ξ наибольший вклад в концентрацию дает член с наибольшим значением A_k (то есть с наибольшим отношением заряда к массе). Обозначим соответствующее k через k' .

3. О точности приближения линейного потенциала. Напомним, что мы выразили параметр p через ξ_0 (для которого известно точное значение (23)) из выражения (14):

$$p = -\frac{1}{\xi_0} = \sqrt{\frac{\sum Z_k n_{k0}}{\sum Z_k A_k n_{k0}}}. \quad (28)$$

Однако, если мы попытаемся найти p из условия (9), пользуясь асимптотическими выражениями (26), (27) и оставляя только слагаемые с $k = k'$:

$$\frac{Z_{k'} A_{k'} n_{k'}}{(A_{k'} p)^2} = Z_{k'} n_{k'}; \quad p = \sqrt{\frac{1}{A_{k'}}}, \quad (28')$$

то полученное выражение будет отличаться от (28). Это связано, конечно, с тем, что приближение (14), вообще говоря, несправедливо для случая многих сортов ионов. При больших ξ начинают сказываться отклонения потенциала от линейности. Отметим, однако, что выражение (28) обеспечивает правильный переход к случаю одного сорта ионов, описанного в первом пункте.

Рассмотрим сказанное на примере трех сортов ионов с одинаковыми массами и зарядами $Z_{1,2,3} = 1, 2, 3$. Небольшое отличие потенциала от линейного проиллюстрировано на рис.2, где приведена прямая

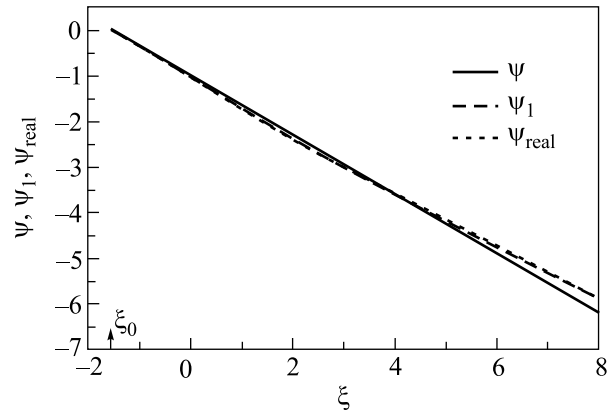


Рис.2. Линейный потенциал ψ , уточнение потенциала через концентрации ψ_1 , реальный потенциал χ_{real}

из (14) и уточненный потенциал ψ_1 , рассчитанный по формуле $\psi_1 = \ln(\sum Z_k n_k(\xi))$ с n_k из (18). На рисунке

приведен также реальный потенциал ψ_{real} , посчитанный в следующем пункте. На рис.3, 4 приведены для иллюстрации скорости и концентрации ионных компонент, рассчитанные по формулам (18), (21), (22).

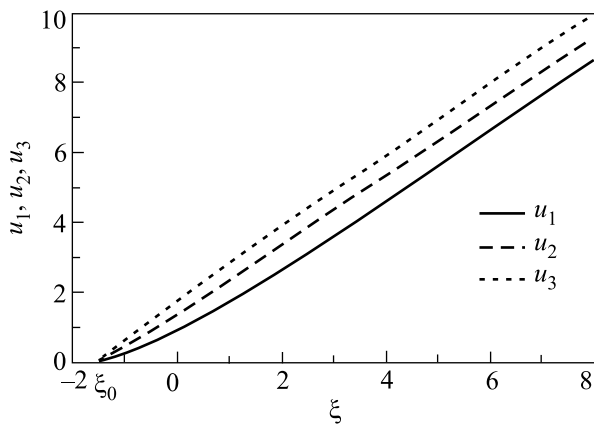


Рис.3. Нормированные ионные скорости в приближении линейного потенциала

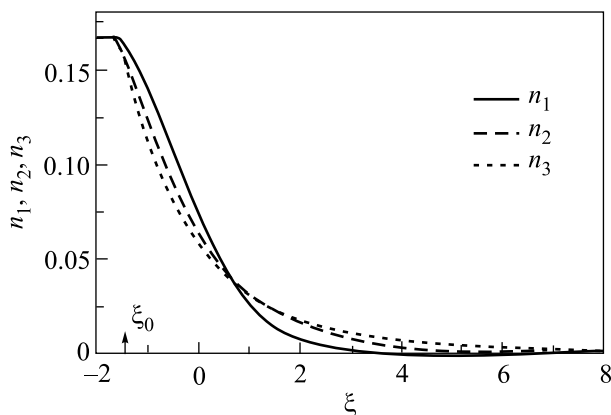


Рис.4. Нормированные ионные концентрации в приближении линейного потенциала

4. Расчет реального потенциала итеративным методом. Для численного расчета потенциала в случае многих сортов ионов удобно воспользоваться приближенными выражениями (18), (21), (22) в качестве нулевого приближения. Тогда в качестве первого приближения для потенциала из (7) получим

$$\psi_1 = \ln \left(\sum Z_k n_k^0(\xi) \right), \quad (29)$$

где через $n_k^0(\xi)$ мы переобозначили функции, найденные в п.2. Далее будем действовать по схеме п.2. Уточненный потенциал (29) следует подставить

в уравнение движения (6), чтобы найти уточненные скорости ионов:

$$(u_k^1 - \xi) \frac{du_k^1}{d\xi} = -A_k \frac{d\psi_1}{d\xi}. \quad (30)$$

Это уравнение Абеля второго рода [18], но со сложной функцией $\psi_1(\xi)$ в правой части. Теперь мы не можем найти аналитическое решение, однако уравнение легко решается численно с помощью сеточных методов. Для расчета концентраций удобно сначала проинтегрировать (15) от ξ_0 до ξ . В результате получим формулу, аналогичную (18):

$$n_k^1 = n_{k0} \frac{-\xi_0}{u_k^1 - \xi} \exp \left(- \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{u_k^1 - \xi} \right). \quad (31)$$

Для следующего уточнения потенциала пользуемся найденными концентрациями из (31) для $\psi_2 = \ln(\sum Z_k n_k^1(\xi))$, и так далее. Итерации быстро сходятся к точному решению ψ_{real} , приведенному на рис.2 для случая трех сортов ионов. Из рисунка видно, что линейный потенциал дает хорошее приближение к расчетному значению ψ_{real} , а первое уточнение потенциала ψ_1 практически неотличимо от ψ_{real} .

Отметим, что численные расчеты (не приведенные в данной работе) кинетического уравнения Власова для случая максвелловской начальной функции распределения электронов, когда температура электронов значительно превосходит ионную, дают результаты, очень близкие к приведенным выше гидродинамическим расчетам.

Авторы предполагают продолжить исследование этой задачи с помощью кинетического подхода для произвольных температур ионов и немасвелловского начального распределения электронов.

Работа выполнена при поддержке гранта ИНТАС # 01-0373.

Авторы благодарят А. А. Лукьянова за полезные обсуждения в ходе работы.

1. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **49**, 647 (1965); **54**, 891 (1968); А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **56**, 1778 (1969).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, М.: Гостехиздат, 1964.
3. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **63**, 516 (1972).
4. J. E. Crow, P. L. Auer, and J. E. Allen, *J. Plasma Phys.* **14**, 65 (1975).
5. P. Mora and R. Pellat, *Phys. Fluids* **22**, 2300, (1979).
6. C. Chan, N. Hershkovitz, A. Ferreira et al., *Phys. Fluids* **27**, 266, (1984).

7. А. А. Иванов, Л. Л. Козоровитский, В. Д. Русанов, Доклады Академии Наук СССР **184**, 811 (1969).
8. А. А. Иванов, Я. Н. Истомина, Л. Л. Козоровицкий, В. Д. Русанов, Журнал Прикладной математики и технической физики **1**, 51 (1971).
9. А. А. Иванов, В. Д. Русанов, Р. З. Сагдеев, Письма в ЖЭТФ **12**, 29 (1970).
10. C. E. Hilla and K. Langbein, Rev. Sci. Instrum. **69**, 643 (1998).
11. A. A. Ivanov, L. I. Elizarov, A. B. Sionov, M. Bacal, Phys. Rev. **E52**, 6679 (1995).
12. A. A. Ivanov, A. B. Sionov, F. El. Balghiti-Sube, and M. Bacal, Phys. Rev. **E55**, 28 (1997).
13. V. F. Kovalev, V. Yu. Bychenkov, and V. T. Tikhonchuk, JETP Lett. **74**, 10 (2001).
14. R. Geler, *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas*, Institute of Physics, Bristol, 1996.
15. A. Girard and G. Melin, Nucl. Instrum. and Methods in Phys. Res. **A382**, 252 (1996).
16. M. Kidera, M. Lamouereux, V. Mironov et al., Rev. Sci. Instrum. **70**, 4234 (1999).
17. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *Вопросы теории плазмы*, М.: Атомиздат, 1980.
18. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М.: ИИЛ, 1951.