Письма в ЖЭТФ, том 78, вып. 3, с. 180 – 183

Снятие вырождения уровней Ландау двумерных электронов точечными примесями

А. М. Дюгаев[+*], *П. Д. Григорьев*[+□1)], *Ю. Н. Овчинников*[+*]

[+]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия*

[*]*Max-Planck-Institut for the Physics of Complex Systems, Dresden D-01187 Germany*

[□]*High Magnetic Field Laboratory, MPI-FRF and CNRS, BP166, Grenoble, F-38042, France*

Поступила в редакцию 3 июля 2003 г.

Исследована плотность состояний двумерного электронного газа в магнитном поле с учетом рассеяния на точечных примесях. Показано, что учет электрон-примесного взаимодействия приводит к полному снятию вырождения уровней Ландау даже при малой объемной плотности точечных примесей. Вычислена плотность состояний в самосогласованном приближении, то есть с учетом всех диаграмм без пересечений примесных линий. Электронная плотность состояний ρ определяется вкладом не полюса, а разреза одночастичной функции Грина. В широком интервале значений энергии электрона ω, отсчитанной от каждого уровня Ландау, плотность состояний $\rho(\omega)$ обратно пропорциональна $|\omega|$ и пропорциональна концентрации примесей. Результаты применимы для таких двумерных электронных систем, как инверсионные слои, гетероструктуры и электроны на поверхности жидкого гелия.

PACS: 72.10.Fk

1. Двумерные электронные системы реализуются на границе раздела двух конденсированных сред. Типичными примерами таких систем являются электроны на поверхности жидкого гелия [1], электроны в инверсионных слоях и гетероструктурах [2]. В магнитном поле спектр двумерных электронов дискретен и бесконечно кратно вырожден. Интересен вопрос о снятии этого вырождения взаимодействием электронов с точечными примесями. Существует мнение, что при малой поверхностной плотности таких примесей n_s бесконечно кратное вырождение уровней Ландау снимается только частично [3]. А именно, если выполнено неравенство $N < S/2\pi l_H^2$, где N – полное число примесей: $N = n_s S$, S – площадь доступная для электронов, а l_H – магнитная длина, то кратность вырождения уровня Ландау равна $\frac{S}{2\pi l_H^2} - N$. При этом N электронных состояний отщепляются от каждого уровня и образуют примесную зону. Изящное доказательство этого утверждения [3] основано на возможности так определить волновую функцию электронов на уровне Ландау, что она зануляется в точках расположения примесей. Если примеси точечные, то они не влияют на спектр $S/2\pi l_H^2 - N$ электронных состояний. Однако такой вывод нуждается в определении поверхностной плотности примесей n_S. Дело в том, что двумерные электронные системы, как правило, являются *открытыми*. Движение электронов по оси z, перпендикулярной проводящей плоскости, характеризуется волновой функцией $\varphi(z)$, ограниченной очень большим, макроскопическим масштабом z_∞, зависящим от геометрии измерительного прибора. Типичная зависимость φ от z имеет вид [1, 2]

$$\varphi^2(z) = \frac{1}{2z_0} z_*^2 e^{-z_*}, \quad \text{если} \quad 0 < z < z_\infty, \qquad (1)$$
$$\varphi(z) = 0 \quad \text{если} \quad z < 0, z_* \equiv z/z_0.$$

Для электрона доступна вся область $z > 0$, а не только $z \le z_0$, поэтому даже при малой объемной плотности примесей n_{imp} поверхностная их плотность $n_S = n_{imp} z_\infty$ очень велика и можно положить $n_S = \infty$. По этой причине бесконечно кратное вырождение уровней Ландау снимается взаимодействием электронов с точечными примесями полностью, а не частично. Ниже определена электронная плотность состояний ρ при малой концентрации примесей $C_0 \equiv n_{imp} 2\pi l_H^2 z_0 \ll 1$. Иначе говоря, предполагается, что примесей мало в поверхностном слое $z \le z_0$, но много в области $z < z_\infty : C_\infty = C_0(z_\infty/z_0) \gg 1$. Это обычно имеет место на опыте [1, 2]. Для электронов на поверхности жидкого гелия в роли точечных примесей выступают тяжелые атомы пара гелия.

[1)]e-mail: pashag@itp.ac.ru

2. Плотность состояний $\rho(E)$ связана с мнимой частью функции Грина электронов $G(r,r',E)$ соотношением

$$\rho(E) = \frac{-1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,G(E), \quad G(E) = \int d^3 r G(r,r,E)$$

[4]. Поскольку электронная система однородна вдоль проводящей плоскости (x,y), функция Грина $G(r,r,E)$ не зависит от координаты вдоль этой плоскости: $G(r,r,E) = G(z,E)$. Обычно расстояние между электронными уровнями вдоль оси z велико, и все электроны находятся на нижнем энергетическом уровне и имеют одну и ту же волновую функцию $\varphi(z)$. Поэтому $G(z,E) = G(E)\varphi^2(z)$. Магнитное поле H предполагается сильным, поэтому взаимодействие электронов с примесью $V(\mathbf{r})$ не перемешивает их волновые функции на разных уровнях Ландау. Следовательно, плотность состояний $\rho(E)$ зависит только от переменной $\omega \equiv E - \varepsilon_0 - (n+1/2)\omega_c$, где ε_0 – энергия нижнего уровня квантования по оси z, а ω_c – циклотронная энергия. Мы будем рассматривать точечные примеси. Потенциал взаимодействия электрона с такими примесями дается выражением

$$V(\mathbf{r}) = u_0 \sum_i \delta(x-x_i)\delta(y-y_i)\ \delta(z-z_i). \qquad (2)$$

Здесь x,y,z,x_i,y_i,z_i – координаты электрона и примесей. Длина рассеяния электрона на примеси

$$a = -m\,u_0/2\pi\hbar^2. \qquad (3)$$

Функция Грина $G(\omega)$ связана с затравочной функцией $G_0(\omega)$ чистой электронной системы известным соотношением [4]

$$G(\omega) = \frac{1}{G_0^{-1}(\omega) - \Sigma(\omega)}, \qquad G_0(\omega) = \frac{1}{\omega}. \qquad (4)$$

Функция $\Sigma(\omega)$ (4) определяется в хорошо разработанной крестовой технике [5, 4, 6]:

$$\Sigma(\omega) = u_0 n_{imp} \int\limits_0^{z_\infty} \frac{\varphi_0^2(z)dz}{1 - \frac{u_0}{2\pi l_H^2}\varphi_0^2(z)G(\omega)}. \qquad (5)$$

Это выражение соответствует суммированию всех крестовых диаграмм без пересечений примесных линий [6] с последующим усреднением по положениям примесей. Соотношения (4),(5) верны только для точечных примесей (2). Удобно определить приведенную волновую функцию φ_* поперечного движения электрона соотношением

$$\varphi_0^2(z) = \frac{1}{z_0}\varphi_*^2(z_*), \quad z_* \equiv \frac{z}{z_0}, \quad \int \varphi_*^2(z_*)\ dz_* = 1, \quad (6)$$

где z_0 – характерный масштаб функции $\varphi_0(z)$. Из (3), (5), (6) получаем

$$\Sigma(\omega) = -G^{-1}(\omega)C_0 J(\omega);$$

$$J(\omega) \equiv \int\limits_0^{z_\infty/z_0} \frac{\varphi_*^2(z_*)dz_*}{\varphi_*^2(z_*) - 1/[\omega_0 G(\omega)]}, \qquad (7)$$

где $C_0 \equiv 2\pi l_H^2 z_0 n_{imp}$, $\omega_0 \equiv -(a/z_0)\omega_c$.

3. Рассмотрим сначала первый порядок по концентрации примесей. Для этого надо в формулах (5), (7) заменить точную функцию Грина G на затравочную функцию $G_0 = 1/\omega$. Это приближение соответствует суммированию всех крестовых диаграмм, отвечающих рассеянию электрона на одной примеси. Из (4), (7) видно, что функция Грина G формально имеет полюс при $\omega = 0$:

$$G = \frac{1}{\omega[1 + C_0 J(\omega)]}. \qquad (8)$$

Однако, как это следует из (7), при $\omega \to 0$ интеграл по z_* расходится, что приводит к малости вычета в этом полюсе, связанной с большой величиной параметра обрезания z_∞:

$$\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}G(\omega) = \delta(\omega)\frac{1}{1+C_\infty}; \quad C_\infty = C_0\frac{z_\infty}{z_0}. \qquad (9)$$

Положив $z_\infty = \infty$, приходим к выводу о полном снятии бесконечно кратного вырождения уровней Ландау уже в первом порядке по концентрации примесей. Плотность состояний $\rho(\omega)$ определяется только особенностями величины $J(\omega)$ (7):

$$\rho(\omega) = \frac{-C_0 \mathrm{Im}\,J(\omega)}{\pi\omega[(1 + C_0 ReJ(\omega))^2 + C_0^2(\mathrm{Im}J(\omega))^2]}. \qquad (10)$$

Рассмотрим, прежде всего, модельный случай, когда приведенная волновая функция φ_* имеет вид

$$\varphi_*^2(z_*) = e^{-z_*} \quad \text{при} \quad z_* > 0, \qquad (11)$$

$$\varphi_*^2(z_*) = 0 \quad \text{при} \quad z_* < 0.$$

Такая функция отвечает граничному условию при $z = 0$ для узкой и глубокой потенциальной ямы [17]. Функция $J(\omega)$ (7) принимает вид

$$J(\omega) = \ln\frac{\omega - \omega_0}{\omega}. \qquad (12)$$

Предполагая, что есть только один тип примесей с отрицательной длиной рассеяния a, что соответствует отталкиванию электрона от примеси, из (10), (12) получаем

$$\rho(\omega) = \frac{C_0}{\omega\left[\left(1 + C_0\ln\frac{\omega_0 - \omega}{\omega}\right)^2 + C_0^2\pi^2\right]}. \qquad (13)$$

Плотность состояний $\rho(\omega)$ в рассматриваемом случае определяется не полюсом, а разрезом функции Грина $G(\omega)$. Учитывая определение параметра ω_0 (7), получаем критерий слабости электрон-примесного взаимодействия $V(\mathbf{r})$ (3): $a \ll z_0$. Следовательно, если длина рассеяния электрона на примеси меньше характерного масштаба поперечного квантования по оси z, то применимо приближение одного уровня Ландау, а плотности состояний разных уровней не пересекаются. Из (13) следует, что в широкой области ω плотность состояний обратно пропорциональна ω:

$$\rho(\omega) = \frac{C_0}{\omega} \quad \text{при} \quad C_0 \ln\,\frac{\omega_o}{\omega} \ll 1. \tag{14}$$

Функция $\rho(\omega)$ (13) интегрируема и с точностью до членов пропорциональных квадрату концентрации примесей C_0, имеет место равенство

$$\int \rho(\omega)\; d\omega \cong \int\limits_0^{\omega_0} \frac{C_0 d\omega}{\omega[1 + C_0\;\ln\;\frac{\omega_0-\omega}{\omega}]^2} \cong 1. \tag{15}$$

Следовательно, при включении электрон-примесного взаимодействия число электронных состояний не изменилось, хотя δ-образный пик затравочной плотности состояний $\rho_0(\omega)$ отсутствует у истинной плотности состояний $\rho(\omega)$. Это означает, что при любом малом значении параметра ω всегда найдется примесь с координатой $z_i = z_0\;\ln(\omega_0/\omega) \gg z_0$, на которой будет снято вырождение уровней Ландау. От вида волновой функции $\varphi(z)$ этот вывод не зависит. Для физической функции $\varphi(z)$ (1) плотность состояний $\rho(\omega)$ дается тем же выражением (13) при $\omega \ll \omega_0$, если не интересоваться величинами типа $\ln\ln(\omega_0/\omega)$. Важно только, что $\varphi(z) \sim e^{-z/z_0}$ при $z \gg z_0$. Более того, всегда существует широкая область ω, где $\rho(\omega)$ обратно пропорциональна ω. Например, для осцилляторной волновой функции $\varphi_*(z_*) \sim e^{-z_*^2}$ из (10) получаем при $\omega \ll \omega_0$

$$\rho(\omega) = \frac{C_0}{2\omega(\ln\;(\omega_0/\omega))^{1/2}[1 + C_0(\ln\;(\omega_0/\omega))^{1/2}]^2}. \tag{16}$$

Для случая сильного электрического поля, прижимающего электроны к границе раздела двух конденсированных сред, $\varphi_*^2(z_*) \sim e^{-z_*^{3/2}}$, из (10) имеем при $\omega \ll \omega_0$

$$\rho(\omega) = \frac{2C_0}{3\omega(\ln(\omega_0/\omega))^{1/3}[1 + C_0(\ln(\omega_0/\omega))^{2/3}]^2}. \tag{17}$$

Итак, для открытых электронных систем учет электрон-примесного взаимодействия полностью снимает вырождение уровней Ландау. Плотность состояний $\rho(\omega)$ определяется выражениями (13)–(17). Обобщение на случай нескольких типов примесей тривиально. Например, аналогом (14) являются зависимости

$$\begin{aligned} \rho(\omega) &= C_-/\omega \quad \text{при} \quad \omega > 0, \\ \rho(\omega) &= C_+/|\omega| \quad \text{при} \quad \omega < 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где C_- – суммарная концентрация отталкивающих, а C_+ – притягивающих примесей.

4. Зависимость $\rho(\omega)$ (13) имеет место при

$$\omega_0 e^{-1/C_0} \ll \omega,\ \omega_0 - \omega \gg e^{-1/C_0}. \tag{19}$$

Вне этой области важны члены следующих порядков по концентрации примесей C_0, поскольку они умножаются на большой логарифм $\ln[(\omega_0 - \omega)/\omega]$. Чтобы исследовать функцию Грина в более широкой области по ω, рассмотрим самосогласованное приближение, представленное формулами (4), (5), (7). После подстановки (11) в (7) и (4) получаем уравнение для G:

$$G = \frac{1}{\omega}[1 - C_0 \ln(1 - \omega_0 G)]. \tag{20}$$

При $\omega \ll \omega_0$, $\omega_0 G \gg 1$ уравнение (20) можно упростить:

$$G = \frac{-C_0}{\omega}[\ln(-\omega_0 G) - 1/C_0] = \frac{-C_0}{\omega} \ln\left(-\frac{e\omega_N G}{C_0}\right); \tag{21}$$

здесь мы ввели новый масштаб энергии $\omega_N \equiv \equiv \omega_0 \exp(-1/C_0) C_0/e$. Введем новую функцию $y \equiv \equiv -\omega G/C_0$. Уравнение (21) принимает простой вид:

$$y = \ln(y\;\omega_N/\omega) + 1, \tag{22}$$

из которого следует, что y зависит только от одной действительной переменной: $y = y(\omega/\omega_N)$. Выделим действительную и мнимую части этой функции: $y = A + iB$. Из (22) получаем систему двух уравнений на действительные функции A и B, которая сводится к виду

$$\begin{aligned} A &= B/\tan B, \\ e^{B/\tan B}\frac{\sin B}{B} &= \frac{\omega_N e}{\omega}. \end{aligned} \tag{23}$$

Последнее уравнение определяет плотность состояний $\rho(\omega) = C_0 B/\pi\omega$. Нас интересует решение $B(\omega/\omega_N) \geq 0$. Функция $B(\omega/\omega_N)$ монотонно возрастает от нуля при $\omega = \omega_N$ до $B = \pi$ при $\omega/\omega_N \to \infty$.

Вблизи $\omega = \omega_N$ функция $B \approx \sqrt{2(\omega - \omega_N)/\omega_N}$. При $\omega_N \ll \omega \ll \omega_0$ с точностью до дважды логарифмических членов по ω/ω_N функция $B = \pi[1 - 1/\ln(\omega/\omega_N)]$. Итак, при $\omega \ll \omega_0$ плотность состояний дается универсальной функцией от ω/ω_N, асимптотический вид которой при $C_0 \ll 1$ дается выражением

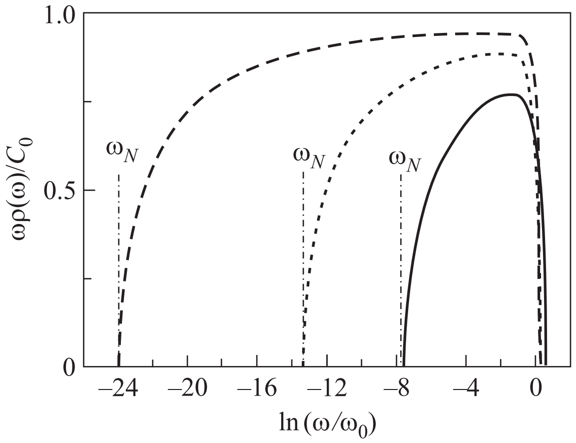
$$\omega\rho(\omega)/C_0 = \sqrt{2(\omega - \omega_N)/\omega_N}/\pi, \quad \omega - \omega_N \ll \omega_N;$$

$$\omega\rho(\omega)/C_0 = 1 - 1/\ln(\omega/\omega_N), \quad \omega \gg \omega_N. \qquad (24)$$

Рассмотрим теперь область $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, где в первом порядке по концентрации C_0 мы имели сингулярность в $\operatorname{Im} G_0(\omega)$. Решение $G(\omega)$ самосогласованного уравнения (4),(5) не является сингулярным в этой области и монотонно спадает до нуля при $\omega = \omega_x \equiv \omega_0(1 + x_0)$, где x_0 является решением алгебраического уравнения $x_0 = C_0[\ln(1/C_0) + 1 + \ln(1 + x_0)]$. При $C_0 \ll 1$ получаем $x_0 \approx C_0[\ln(1/C_0) + 1 + C_0\ln(1/C_0)]$. Вблизи $\omega = \omega_x$ из уравнения (20) проведя вычисления, аналогичные тем, что привели к (24), получаем

$$B(\omega) = \sqrt{2(\omega_x - \omega)[1/(\omega_0 C_0) - 1/\omega_x]}.$$

На рисунке изображена приведенная плотность состояний $\omega\rho(\omega)/C_0 = B/\pi$ для трех различных концентраций примесей. При $\omega \ll \omega_0$ график выходит на универсальную кривую, которая смещается по оси абсцисс вместе со смещением ω_N. Полученное решение дает правильное поведение плотности состояний $\rho(\omega)$, пока она не обращается в нуль, то есть на интервале $\omega_N < \omega < \omega_x$. Вне этого интервала имеются "хвосты" плотности состояний, которые экспоненциально малы и могут быть найдены только с учетом диаграмм с пересечением примесных линий.



Приведенная плотность состояний $\omega\rho(\omega)/C_0$ в логарифмическом масштабе для трех различных значений концентрации примесей: $C_0 = 0.2$ (сплошная линия), $C_0 = 0.1$ (пунктир) и $C_0 = 0.05$ (штриховая линия). Для каждой кривой отмечено значение ω_N, вблизи которого зависимость $(\omega/C_0)\rho(\omega)$ является универсальной функцией от ω/ω_N

В заключение еще раз подчеркнем, что предложенная нами физическая картина не согласуется с существующими в литературе представлениями. Некоторые точные результаты теории электропримесного взаимодействия для двумерных электронных систем приведены в [8–10]. Однако в этих работах рассматриваются двумерные точечные примеси, когда потенциал $V(r)$ (2) имеет вид

$$V(r) = u_0\delta(x - x_i)\delta(y - y_i). \qquad (25)$$

Так как координата примеси по оси z не представлена, то $V(r)$ (25) отвечает не точечной примеси, а δ-образной нити. Приведенные выше результаты предполагают трехмерность точечных примесей. Если "забыть" произвести усреднение по координате z_i, то мы перейдем в нефизический предел δ-образных нитей.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований и INTAS #N01-0791.

---

1. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, М.: Наука, 1989.
2. *Квантовый эффект Холла*, под ред. Р. Пренджа, С. Гирвина. М.: Мир, 1989.
3. Е. М. Баскин, Л. Н. Магарилл, М. В. Энтин, ЖЭТФ **75**, 723 (1978).
4. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, М.: Гос. изд. ФМЛ, 1962.
5. Ю. А. Бычков, ЖЭТФ **39**, 1401 (1960).
6. Tsunea Ando, J. Phys. Soc. Japan **36**, 1521 (1974); Tsunea Ando, J. Phys. Soc. Japan **37**, 622 (1974).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1974.
8. F. Wegner. Z. Phys. **B51**, 279 (1983).
9. E. Brezin, D.I. Gross, and C. Itzykson. Nucl. Phys. **B235**, 24 (1984).
10. W. Apel, J. Phys. **C20**, L577 (1987).