Письма в ЖЭТФ, том 29, вып.3, стр. 196 – 200 5 февраля 1979 г.

ГИДРОДИНАМИКА ИСПАРЕНИЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

А.В.Бялко

В работе получено приближенное сферически-симметричное решение уравнений релятивистской гидродинамики, описывающее позднюю стадию квантового испарения черной дыры. Гидродинамическая стадия, оканчивающаяся при температурах порядка массы π-мезона, дает возможность найти распределение разлетающихся частиц по энергиям.

Как было показано Хоукингом [1], черная дыра малой массы m излучает, как черное тело с температурой $T = m^{-1}$ [1]. Этот процесс приводит к тому, что за конечное время черная дыра малой массы должна испариться: $m = (-t)^{1/3}$ (отсчитывая время от момента испарения). Температура излучения при $m < \mu^{-1}$ превышает массу π-мезона μ и образующиеся частицы сильно взаимодействуют между собой. Поэтому форма импульса излучения, распространяющегося от взорвавшейся черной дыры, должна определяться решением задачи релятивистской гидро-

---

[1] В работе используется планковская система единиц $c = \hbar = G = 1$. Все равенства написаны с точностью до постоянных множителей порядка единицы. Параметром задачи является масса π-мезона μ, в планковских единицах равная 10^{-20}.

динамики, аналогично случаю множественного рождения частиц при столкновениях, рассмотренному Ландау [2]. Решение Ландау для одномерного разлета представляет собой волну с крутым передним фронтом и степенным спадом. Поэтому, приступая к задаче сферически-симметричного разлета, можно ожидать, что спад импульса излучения после взрыва черной дыры также имеет некую степенную асимптотику.

Эта проблема, имеющая астрофизические приложения, носит, кроме того, и значительный методический интерес в связи с вопросом Кундта [3], где содержится энтропия – на поверхности черной дыры или в ее излучении. Найденное здесь решение окажется адиабатическим, что позволит рассчитать конечное число разлетевшихся частиц по начальной энтропии черной дыры.

Будем предполагать, что уравнение состояния ультрарелятивистской среды $p = \epsilon/3$ справедливо без ограничений. Тогда тензор энергии-импульса есть $T_i^k = \epsilon(4 u_i u^k \delta_i^k)/3$, где u^i – четырехмерная скорость. Область применения гидродинамики, задаваемая неравенством $T > \mu$, на поздних стадиях разлета значительно превосходит гравитационный радиус черной дыры. Поэтому выпишем законы сохранения $T^k_{i;k} = 0$ в плоской сферически-симметричной метрике. Это даст два уравнения для плотности энергии $\epsilon(r,t)$ и скоростей $u_0 = u^0 = \sqrt{1 + u_1^2}$; $u^1 = -u_1$

$$
\begin{aligned}
&r^2 \frac{\partial}{\partial t}\epsilon(4u_0^2 - 1) + 4\frac{\partial}{\partial r}\epsilon u_0 u^1 r^2 = 0,\\
&4\frac{\partial}{\partial t}\epsilon u_0 u^1 + \frac{\partial}{\partial r}\epsilon(4u_1^2 + 1) + 2\epsilon u_1^2 r^{-1} = 0.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Из системы (1) можно тождественно получить уравнение

$$
\frac{\partial}{\partial t}\epsilon^{3/4} r^2 u^0 + \frac{\partial}{\partial r}\epsilon^{3/4} r^2 u^1 = 0,
$$

которое выражает собой закон сохранения энтропии $(s u^i)_{;i} = 0$ ($s \sim \epsilon^{3/4}$ – плотность энтропии при ультрарелятивистском уравнении состояния).

Рассмотрим сначала стадию медленного, квазистационарного испарения. Предполагая $u >> 1$ и пренебрегая временными производными в уравнениях гидродинамики, получим $\epsilon = T^4 = r^{-4}$; $u = r(-t)^{-1/3}$. Область применения гидродинамики при этом простирается от поверхности черной дыры $r = (-t)^{1/3}$ до радиуса $r = \mu^{-1}$, где температура равна энергии взаимодействия μ. Для применимости квазистационарного решения потребуем, чтобы масса черной дыры оставалась много большей, чем полная энергия в гидродинамической зоне: $m = (-t)^{1/3} >>$ $>> \int^{\mu^{-1}} \epsilon u^2 r^2 dr = \mu^{-1}(-t)^{-2/3}$. Таким образом, стадия квазистационарного испарения проходит при $m >> m_0 = \mu^{-1/3}$.

Будем теперь искать решение системы (1) после окончания испарения в области $r >> |r - t|$, предполагая $u_0 \approx u^1 \approx u >> 1$. Введя обозначения $\tau = \ln r/R_0$; $\eta = \ln|r - t|/\xi_0$; $l = \ln\epsilon/\epsilon_0$, с пока неизвестными постоянными R_0, ξ_0 и ϵ_0, получим уравнение для функции $l(\tau, \eta)$:

$$3 + 2\frac{\partial l}{\partial \eta} + \frac{\partial l}{\partial \tau} + \frac{3}{4}\frac{\partial l}{\partial \eta}\frac{\partial l}{\partial \tau} = 0, \tag{2}$$

которое только коэффициентами отличается от аналогичного уравнения одномерной гидродинамики [2]. Скорость u находится с помощью выражения

$$u^2 = \frac{\tau}{(\tau - t)}\frac{1}{4}\frac{\partial l/\partial \eta}{(3 + \partial l/\partial \tau)}.$$

Общее решение уравнения (2) имеет параметрический вид

$$l(\tau, \eta) = A\eta - \frac{3 + 2A}{4 + 3A}\tau + B(A);$$

$$\frac{\partial l}{\partial A} = \eta + \frac{\tau}{(4 + 3A)^2} + \frac{dB}{dA} = 0;$$

с произвольной функцией $B(A)$. Точная формулировка граничных условий для уравнения (2), как и в случае одномерной гидродинамики, затруднительна. Найдем его асимптотическое решение при $\eta >> \left|\frac{dB}{dA}\right|$, когда форма распространяющейся волны не зависит от условий энерговыделения. Положив $B = 0$, что соответствует переопределению ϵ_0, получим

$$l(\tau, \eta) = -\frac{4}{3}\eta - \frac{8}{3}\tau \pm \frac{4}{3}\sqrt{-\tau\eta};$$

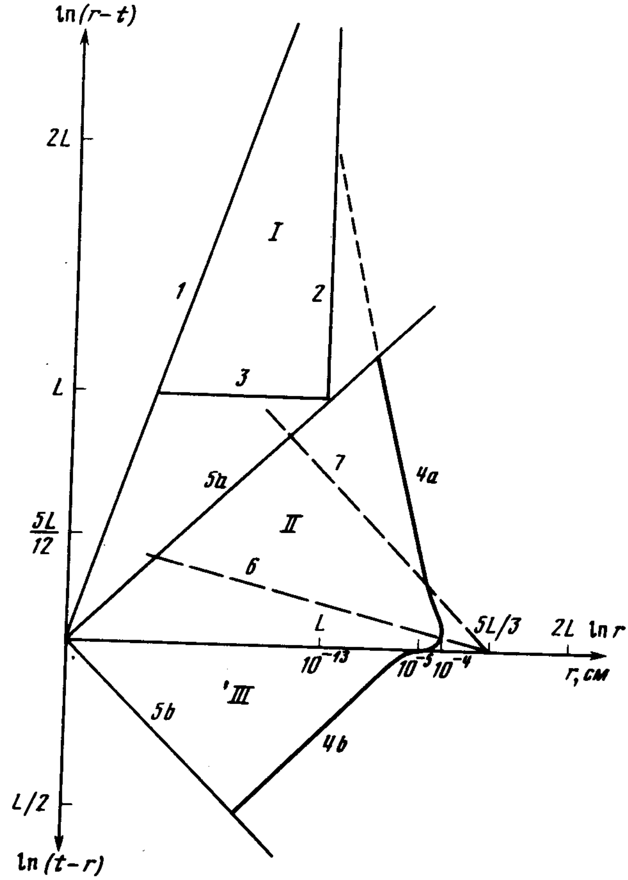
$$u^2 = \pm\frac{\tau}{\tau - t}\sqrt{-\frac{\tau}{4\eta}}. \tag{3}$$

Из положительности величины u^2 следует, что при $\tau > T$ (передний фронт волны) справедлив верхний знак, при $\tau < t$ соответственно, нижний знак в решении (3). Таким образом, при сферически-симметричном гидродинамическом разлете, в отличие от одномерного, передний фронт волны нарастает по степенному закону.

Для нахождения величин постоянных R_0, ξ_0, и ϵ_0, рассмотрим зависимость от времени потока энергии $T^1 = \epsilon u^2$ и потока энтропии $s u^1 = \epsilon^{3/4} u$ через поверхность сферы $4\pi r^2$. При $\tau > t$, опуская коэффициенты и логарифмически медленно меняющиеся выражения, имеем

$$\epsilon u^2 \tau^2 d(\tau - t) = \exp\left\{-\frac{1}{3}(\sqrt{\eta} - 2\sqrt{-\tau})^2\right\}\epsilon_0 R_0^3\, d\eta;$$

$$dN = su\tau^2 d(\tau - t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sqrt{\eta} - \sqrt{-\tau})^2\right\}\epsilon_0^{3/4} R_0^{5/2}\xi_0^{1/2}\, d\eta. \tag{4}$$



Области применения решений релятивистской гидродинамики при испарении черной дыры: I — область квазистационарного испарения; прямые: $1 - r = (-t)^{1/3}$ — поверхность черной дыры; $2 - r = \mu^{-1}$; $3 - (-t) = \mu^{-1}$. II — область переднего фронта волны; кривая $4a$ — поверхность $T(r,t) = \mu$, прямая $5a - r - t = r$. III — область заднего фронта волны; кривая $4b$ — поверхность $T(r,t) = \mu$, прямая $5b - t - r = r$. Штриховые прямые 6 и 7 показывают соответственно положения максимумов плотностей потоков энергии и энтропии

Для сходимости интегралов величина r должна быть отрицательной, т.е. $\xi_0 << |r - t| << r << R_0$. Интегрирование выражений (4) приводит к результату, что полная энергия и полное число частиц (энтропия), пересекающие сферу произвольного радиуса r — постоянные величины. Они равны соответственно начальной массе черной дыры m_0 и ее начальной энтропии, которая, согласно [1], есть m_0^2. В качестве m_0 следует взять такую массу черной дыры, при которой становится несправедливым режим квазистационарного испарения, т.е. $m_0 = \mu^{-1/3}$. Наименьший параметр задачи ξ_0, определяющий переход от переднего фронта к заднему фронту волны, должен быть порядка планковской длины: $\xi_0 = 1$. Вычислив остальные постоянные, сформулируем окончательный результат для зависимости температуры от координат:

$$T = \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{L}{18} - \dfrac{\ln(r-t)}{3} - \dfrac{2\ln r}{3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{\ln(r-t)\left(\dfrac{5}{3}L - \ln r\right)}\right\}, & r > t \\ \exp\left\{-\dfrac{L}{18} - \dfrac{\ln(t-r)}{3} - \dfrac{2\ln r}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{\ln(t-r)\left(\dfrac{5}{3}L - \ln r\right)}\right\}, & r < t \end{cases}.$$

Здесь обозначено $L = -\ln\mu = 46$. Область применимости этого решения, следующая из неравенств $T > \mu$ и $|r-t| < r$, показана на рисунке. Максимум плотности энергии (максимум температуры) и максимум плотности частиц, вычисляемые из соотношений (4), достигаются, как видно из рисунка, в области применимости решения.

После пересечения поверхности $T = \mu$ частицы перестают взаимодействовать между собой и разлетаются так, что энергия каждой частицы $E = Tu = \mu\sqrt{\dfrac{r}{r-t}}$ в дальнейшем остается постоянной. Второе из соотношений (4) дает возможность найти в параметрическом виде распределение частиц по энергиям dN/dE. Оно имеет максимум при $E = \exp\{-0,083L\}$.

В заключение остановимся на астрофизических аспектах полученного решения. Форма импульса, который видел бы далекий наблюдатель от взорвавшейся черной дыры, определяется, главным образом, не гидродинамической стадией, а дальнейшим рассеянием разлетающихся частиц на межзвездной среде. Поэтому наибольший интерес для астрофизических следствий (в частности, для расчета образования элементов во Вселенной с черными дырами [4]) представляет изучение взаимодействия потока частиц с полученным распределением по энергиям с окружающей средой.

Институт
теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 января 1979 г.

Литература

[1] S.W.Hawking. Nature, 248, 30, 1974.

[2] Л.Д.Ландау. Собрание трудов, 2, 153, 260, М., изд. Наука, 1959.

[3] W.Kundt. Nature. 259, 30, 1976.

[4] Я.Б.Зельдович, А.А.Старобинский, М.Ю.Хлопов, В.М.Чечеткин. Письма в Астроном. журн., 3, 110, 1977.