Письма в ЖЭТФ, том 29, вып. 5, стр. 320 – 324 *5 марта 1979 г.*

КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

В.Д.Гершун, В.И.Ткач

На основе использования грассмановых переменных построен лагранжиан, инвариантный относительно внутренней локальной группы $O(n)$, описывающий механику материальной точки со спином $n/2$.

Введение в физику элементарных частиц антикоммутирующих переменных и рассмотрение групп преобразований с такими параметрами привело к обнаружению свойств симметрии между бозонами и фермионами. Интенсивное развитие этого подхода в физике элементарных частиц, получившего название "суперсимметрии" (см. обзор [1]), позволило также по новому взглянуть на известные ранее попытки формулировки гамильтоновой механики спина для точечной частицы. Так в работах [2, 3] было предложено обобщение классической механики частицы со спином, которое основывается на расширении обычного фазового пространства, связанного с заданием положения и скорости частицы, добавлением грассмановых переменных,связанных со спиновыми степенями свободы. Дальнейшее развитие этого направления основывалось на определении суперсимметричных преобразований в таких пространствах [4, 5].

В настоящей работе на основе использования полевого подхода в супергравитации [6] с внутренней локальной группой симметрии $O(n)$ построена классическая и квантовая механика точечной частицы со спином $n/2$. Причем в отличие от супергравитации в четырехмерном пространстве-времени при описании механики точки отсутствует ограничение на размерность n группы $O(n)$.

Движение частицы со спином описывается действием, инвариантным относительно перепараметризации, локальных суперсимметричных и локальных $O(n)$ преобразований. Квантовая теория строится накладыванием канонических перестановочных соотношений. При этом возникающие в теории и накладываемые на физические вектора состояний связи приводят к уравнению Дирака и условию массовой поверхности для волновой функции Баргмана – Вигнера частицы со спином $n/2$.

Исходный лагранжиан описывает взаимодействие "расширенной" супергравитации (поля e^a_N, λ^k_N и V^{kl}_N) с "суперматерией" (поля X_μ и ψ^k_μ)[1]. В пространстве с одним временем и без пространственных координат чисто "супергравитационная" часть пропадает и лагранжиан принимает вид:

$$L = \frac{\dot X^2_\mu}{2e} - \frac{i}{2}\psi^k_\mu \dot\psi^k_\mu - \frac{i}{2e}\lambda^k\psi^k_\mu \dot X_\mu - \frac{1}{8e}(\lambda^k\psi^k_\mu)^2 + i\psi^k_\mu\psi^l_\mu V^{kl}. \tag{1}$$

Действие, соответствующее лагранжиану (1), инвариантно относительно перепараметризации:

$$\delta e = (ae)^\cdot, \qquad \delta\lambda^k = (a\lambda^k)^\cdot, \qquad \delta V^{kl} = (aV^{kl})^\cdot,$$
$$\delta X_\mu = a\dot X_\mu, \qquad \delta\psi^k_\mu = a\dot\psi^k_\mu, \tag{2}$$

локальных суперсимметричных преобразований:

$$\delta e = ia^k\lambda^k, \quad \delta X_\mu = ia^k\psi^k_\mu, \quad \delta\lambda^k = 2\dot a^k + 4a^lV^{kl},$$
$$\delta\psi^k_\mu = \frac{a^k}{e}\left(\dot X_\mu - \frac{i}{2}\lambda^l\psi^l_\mu\right), \qquad \delta V^{kl} = 0 \tag{3}$$

локальных $O(n)$ преобразований:

$$\delta e = 0, \quad \delta X_\mu = 0, \quad \delta\lambda^k = t^{kl}\lambda^l, \quad \delta\psi^k_\mu = t^{kl}\psi^l_\mu,$$

[1] Здесь $\mu = 0, 1, 2, 3$; $k, l = 1, 2.. n$; N, a – индексы пространства-времени.

$$\delta V^{kl} = \frac{\dot{t}^{kl}}{2} + t^{kn} V^{nl} - t^{ln} V^{nk} . \tag{4}$$

Отметим, что алгебра преобразований (2) – (4) замыкается только с учетом уравнений движения. При этом для полей e, λ^k и V^{kl}, образующих "супермультиплет" вследствие малой размерности пространства-времени не существует уравнений движения, поэтому для этих полей алгебра замыкается. Использование уравнений движения для полей "материи" X_μ и ψ^k_μ представляет собой обычную ситуацию в суперсимметричных теориях и соответствует тому, что в "материальный" супермультиплет не включены вспомогательные поля. Включение их приводит к замыканию алгебры преобразований.

Например, коммутатор двух суперсимметричных преобразований равен комбинации координатных преобразований, суперсимметричных и $O(n)$ преобразований:

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] A = \delta_a A + \delta_{\tilde{\alpha}} A + \delta_t A , \tag{5}$$

где A любое из полей (e, λ^k, V^{kl}, X_μ, ψ^k_μ) и параметры преобразования имеют вид:

$$a = \frac{2i\alpha^k\beta^k}{e} \qquad \tilde{\alpha}^k = -i\frac{\alpha^n\beta^n}{e}\lambda^k, \qquad t^{kl} = -\frac{4i\alpha^n\beta^n}{e} V^{kl}. \tag{6}$$

Уравнения движения, следующие из лагранжиана (1):

$$\dot{P}_\mu = 0, \qquad \dot{\psi}^k_\mu = \frac{\lambda^k}{2} P_\mu + 2\psi^l_\mu V^{kl}, \qquad P_\mu = \frac{1}{e}\left(\dot{X}_\mu - \frac{i}{2}\lambda^k\psi^k_\mu\right), \tag{7}$$

и связи

$$P^2_\mu \approx 0, \qquad \psi^k_\mu P_\mu \approx 0, \qquad \psi^k_\mu \psi^l_\mu \approx 0, \qquad \Pi^k_\mu - \frac{i}{2}\psi^k_\mu \approx 0 \tag{8}$$

описывают свободное движение классической безмассовой материальной точки со спином $n/2$. Наиболее наглядно это видно в калибровке, в которой $e = 1$, $\lambda^k = V^{kl} = 0$.

Квантуя эту теорию стандартным образом (см. [7]), наложим канонические перестановочные соотношения

$$[X_\mu, P_\nu]_- = i\hbar\{X_\mu, P_\nu\} = -i\hbar g_{\mu\nu},$$

$$[\psi^k_\mu, \psi^l_\nu]_+ = i\hbar\{\psi^k_\mu, \psi^l_\nu\}^* = -\hbar g_{\mu\nu}\delta^{kl}, \tag{9}$$

где $\{\ \}$ – скобка Пуассона, $\{\ \}^*$ – скобка Дирака.

Решение уравнения (7) в калибровке $e = 1$, $\lambda^k = V^{kl} = 0$, удовлетворяющие каноническим перестановочным соотношениям, имеют вид:

$$X_\mu(\tau) = X_\mu(0) + P_\mu\tau, \qquad \psi^k_\mu = \prod_{i=1}^{k} \gamma^i_5 \gamma^k_\mu \sqrt{\frac{\hbar}{2}} . \tag{10}$$

Накладывая связи на физический вектор состояния, получим в формализме Баргмана – Вигнера условие массовой поверхности

$$P_\mu^2 |\Phi> = 0 , \tag{11}$$

уравнение Дирака

$$\prod_{i=1}^{k} \gamma_5^i \gamma_\mu^k P_\mu |\Phi> = 0, \quad k = 1, \dots n. \tag{12}$$

и условие симметрии функции $|\Phi>_{a_1 \dots a_n}$ по всем индексам, вырезающее представление с максимальным спином $n/2$

$$\prod_{i=1}^{k} \gamma_5^i \gamma_\mu^k \prod_{j=1}^{l} \gamma_5^j \gamma_\mu^l |\Phi> = 0. \tag{13}$$

Аналогичным образом рассматривается движение массивной точки с произвольным спином. Для этого расширим фазовое пространство, введя новую антикоммутирующую координату ψ_5^k, которая соответствует введению "голдстоуновского поля" с суперсимметричным законом преобразования $\delta\psi_5^k = ma^k$ [8]. Для инвариантности действия необходимо с лагранжиану добавить член

$$\delta L = -\frac{e}{2}m^2 - \frac{i}{2}\psi_5^k \dot{\psi}_5^k - \frac{i}{2}m\lambda^k \psi_5^k + i\psi_5^k \psi_5^l V^{kl}. \tag{14}$$

Решения уравнений движения, следующих из (14), имеют вид

$$\psi_\mu^k = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \prod_{i=1}^{k} \gamma_5^i \gamma_\mu^k, \quad \psi_5^k = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \prod_{i=1}^{k} \gamma_5^i.$$

Связи первого рода $P_\mu^2 + m^2 \approx 0$, $\psi_\mu^k P_\mu + m\psi_5^k \approx 0$, $\psi_\mu^k \psi_\mu^l + \psi_5^k \psi_5^l \approx 0$ приводят к условию массовой поверхности и уравнению Дирака для полностью симметричной волновой функции Баргмана – Вигнера, описывающей частицу с массой m и спином $n/2$.

Авторы благодарны Д.В.Волкову за полезные обсуждения.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
6 января 1979 г.
9 февраля 1979 г.

Литература

[1] В.И.Огневецкий, Л.Мезинческу. УФН, 117, 637, 1975.

[2] Ф.А.Березин, М.С.Маринов. Письма в ЖЭТФ, 21, 678, 1975.

[3] R.Casalbuoni. Nuovo Cim., A33, 389, 1976.

[4] L.Brink, S.Deser, B.Zumino, P.Di Vecchia, P.Howl. Phys. Lett., B64, 435, 1976.

[5] L. Brink, P. Di Vecchia, P. Howe. Nucl. Phys., **B118**, 76, 1977.
[6] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen. Phys. Rev., **Д14**, 912, 1976.
[7] R. Casalbuoni. Nuovo Cim., **A33**, 115, 1976.
[8] D. V. Volkov, V. P. Akulov. Phys. Lett., **B46**, 109, 1973.