Письма в ЖЭТФ, том 29, вып. 6, стр. 357 – 360 *20 марта 1979 г.*

КРУПНОМАСШТАБНАЯ КОНТИНУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ХОЛЕСТЕРИКОВ

Г. Е. Воловик

Построена континуальная теория холестериков на масштабах, превышающих шаг спирали. Свободная энергия выражена через единичный вектор нормали к холестерическим плоскостям и дисторсию $\mathbf{v}_s$, аналогичную сверхтекучей скорости в He^3-A.

Континуальная теория холестериков (см. обзор де Жена [1]) исходит из того факта, что на расстояниях, меньших шага спирали $1/q_o$, холестерик является нематиком. Энергия дисторсии холестерика

$$F_d = \frac{1}{2} K_1 (\vec{\nabla}\mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n} + q_o)^2 + \frac{1}{2} K_3 [\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n}]^2 \qquad (1)$$

представляет собой энергию дисторсии нематика, к которой добавлен линейный по градиентам член $K_2 q_o \mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n}$. Этот член обеспечивает существование спиральной холестерической структуры, поскольку минимальной энергией F_d обладает не однородное состояние $\mathbf{n} = \mathrm{const}$, дающее $F_d = \frac{1}{2} K_2 q_o^2$, а состояние вида

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \vec{\alpha}\cos(q_o \mathbf{l}\mathbf{r}) + \vec{\beta}\sin(q_o \mathbf{l}\mathbf{r}) \tag{2}$$

($\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ и $\mathbf{l} = [\vec{\alpha}, \vec{\beta}]$ – тройка ортов, $\mathbf{l}$ показывает направление оси спирали), которое дает $F_d = 0$.

Следующим шагом является построение крупномасштабной континуальной теории холестериков, применимой на масштабах, много больших шага спирали. Такая теория была предложена Любенским и де Женом (см. [1]), однако она оказалась не свободной от недостатков, что видно хотя бы из того, что в их теории выпала зависимость свободной энергии от K_1. Нашей задачей является получение правильной крупномасштабной теории холестериков.

На больших масштабах состояния холестерика задаются ориентацией трех ортов $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\mathbf{l}$, представляющих собой параметр порядка в холестериках (заметим, что в сверхтекучем He^3-A при учете спин-орбитального взаимодействия параметр порядка также представляет собой тройку ортов (см., например, [2])). При слабом искажении холестерической структуры величины $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\mathbf{l}$ становятся зависящими от координат. Требуется усреднить энергию (1) по быстроменяющемуся полю $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ таким образом, чтобы в энергии оставалась квадратичная зависимость от градиентов медленно меняющихся переменных $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\mathbf{l}$. Причем, как видно из размерных соображений, величина q_o не должна входить в конечное выражение для свободной энергии.

Запишем распределение поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в произвольной слабо искаженной холестерической структуре в следующем виде:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \vec{\alpha}\cos\phi + \vec{\beta}\sin\phi. \tag{3}$$

В этой формуле к трем переменным $\vec{\alpha}$, β, $\mathbf{l} = [\vec{\alpha}, \vec{\beta}]$ добавлена лишняя функция ϕ. Эту функцию выберем определенным образом, а именно, потребуем, чтобы

$$\vec{\nabla}\phi = q_o \mathbf{l}. \tag{4}$$

Подстановка (3) в (1) показывает, что именно такой выбор ϕ устраняет в свободной энергии члены, линейные по градиентам параметра порядка, оставляя лишь квадратичную зависимость от этих градиентов:

$$F_d = \frac{1}{2} K_1(\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha}\cos\phi + \vec{\nabla}\vec{\beta}\sin\phi)^2 + \frac{1}{2} K_2(\vec{\alpha}\,\mathrm{rot}\,\vec{\alpha}\cos^2\phi + \vec{\beta}\,\mathrm{rot}\,\vec{\beta}\sin^2\phi +$$

$$+ \sin\phi\cos\phi(\vec{\alpha}\,\mathrm{rot}\,\vec{\beta} + \vec{\beta}\,\mathrm{rot}\,\vec{\alpha}))^2 + \frac{1}{2} K_3([\vec{\alpha}\,\mathrm{rot}\,\vec{\alpha}]\cos^2\phi \;+$$

$$+ [\vec{\beta} \operatorname{rot} \vec{\beta}] \sin^2\phi + \sin\phi \cos\phi ([\vec{a} \operatorname{rot} \vec{\beta}] + [\vec{\beta} \operatorname{rot} \vec{a}]))^2 . \tag{5}$$

Выражение (5) легко усреднить по быстро меняющейся функции ϕ, полагая $< \sin\phi > = 0$, $< \cos^2\phi > = 1/2$, $< \cos^4\phi > = 3/8$ и т. д. В результате, вводя вместо $\vec{a}$ и $\vec{\beta}$ переменную $\mathbf{v}_s$ по формуле

$$v_s^i = - \vec{\beta} \nabla^i \vec{a}, \tag{6}$$

получаем для энергии холестерика следующее выражение:

$$< F_d > = \frac{1}{16} (K_2 + 3K_3)(\vec{\nabla} \mathbf{l})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{l}\, \mathbf{v}_s)^2 + \frac{1}{4} (K_1 + K_3) [\mathbf{l}, \mathbf{v}_s]^2. \tag{7}$$

(Заметим, что в теории Любенского, де Жена последний член отсутствует). На переменную $\mathbf{v}_s$ наложено условие, вытекающее из (6),

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v}_s)_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \mathbf{l} \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_k} \right]. \tag{8}$$

Это соотношение Мермина – Хо [2], полученное для He^3-A, где переменная $\mathbf{v}_s$ является сверхтекучей скоростью. При наличии вихрей в поле $\mathbf{v}_s$ в правой части (8) должны быть добавлены δ-функционные члены. На переменную $\mathbf{l}$ также, как видно из (4), наложено условие

$$\operatorname{rot} \mathbf{l} = 0 . \tag{9}$$

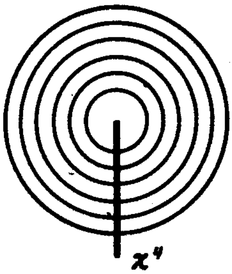
Это условие означает жесткое требование эквидистантности холестерических слоев. Оно полностью определяет распределение поля $\mathbf{l}$ при заданных граничных условиях, в отличие от He^3-A, где поле $\mathbf{l}$ находится из уравнения, получающегося минимизацией функционала энергии типа (7). Поле вектора $\mathbf{v}_s$ определяется минимизацией $< F_d >$ при заданном поле $\mathbf{l}$ и при условии (8).

Несколько слов об особенностях в холестерике. В работах [3, 4] обсуждалась классификация особенностей, исходя из топологической структуры области изменения холестерического параметра порядка без учета условия (9). Учет этого условия затрудняет классификацию. Теперь среди особенностей должны быть и особенности решений уравнения (9) типа каустик и фокальных поверхностей, и все χ^N линии (вихри в поле $\mathbf{v}_s$ с N квантами циркуляции, квант циркуляции равен π), и даже монополь, который в отличие от монополя в He^3-A (см. [5]), является устойчивым. Рассмотрим для примера решение, соответствующее монополю. В холестерике монополь это система концентрических сферических слоев, из центра которой исходит вихрь с $N = 4$ (см. рисунок). Действительно, система сферических слоев

$$\mathbf{l}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \tag{10}$$

($\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ – орты сферической системы координат) удовлетворяет уравнению (9), при этом условие (8) имеет вид

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{v}_s = \mathbf{r}/r^3. \tag{11}$$



Монополь в холестерике – еж в поле вектора нормали к холестерическим слоям $\mathbf{l}$, из центра которого исходит χ^4-дисклинация

Уравнение, получающееся вариацией функционала (7) при условии (11), имеет решение

$$\mathbf{v}_s = \hat{\phi}\ \frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\ . \tag{12}$$

Решение выбрано так, что вихрь (χ^4 – дисклинация), исходящий из монополя, лежит на нижней оси $z < 0$, как на рисунке. При этом в правой части (11) нужно добавить член $4\pi\theta(-z)\delta(\vec{\rho})$. Поле $\mathbf{v}_s$ (12) точно совпадает с полем вектор-потенциала монополя Дирака [6]. Вихрь с $N = 4$ может распасться на два вихря с $N = 2$, но конфигурация слоев от этого не изменится, поскольку она задается уравнением (9) независимо от распределения поля $\mathbf{v}_s$.

Дальнейшей задачей является построение нелинейной динамики холестерика в переменных $\mathbf{l}$, $\mathbf{v}_s$ и обычных гидродинамических переменных.

В заключение хотелось бы поблагодарить И.Е.Дзялошинского, В.П.Минеева и С.П.Новикова за полезные дискуссии.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 февраля 1979 г.

Литература

[1] П. де Жен. Физика жидких кристаллов. М., изд. Мир, 1977, гл. 6.

[2] N.D.Mermin. T.-L.Ho. Phys. Rev. Lett., 36, 594, 1976.

[3] Г.Е.Воловик, В.П.Минеев. ЖЭТФ, 72, 2256, 1977.

[4] V.P.Mineyev. J. de Phys (Fr), Lett. (в печати).

[5] S.Blaha. Phys. Rev. Lett., 36, 874, 1976.

[6] P.A.Dirac. Proc. Roy. Soc., A133, 60, 1931.