Письма в ЖЭТФ, том 29, вып. 7, стр. 445 – 449 *5 апреля 1979 г.*

РЕШЕНИЯ ТИПА ИНСТАНТОНОВ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КИРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ

А.В.Михайлов, А.М.Переломов

Найдены решения типа инстантонов в двумерных суперсимметричных киральных моделях.

В недавних работах [1 – 5] было начато изучение двумерных киральных моделей как в псевдоэвклидовом [1, 2], так и в эвклидовом случае [3 – 5], обобщающих модель n-поля [6]. В настоящей статье ряд результатов работ [3 – 5] мы распространим на случай суперсимметричного обобщения этих моделей[1)].

Напомним, что в обычной эвклидовой киральной теории поле $\phi(x)$ ($x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$) принимает значение в нелинейном однородном многообразии Ф-орбите присоединенного представления простой компактной группы Ли G: $\Phi = G/H$, H – стационарная подгруппа точки орбиты. При этом орбиту Ф можно считать многообразием, естественно вложенным в алгебру Ли $\mathcal{G}$ группы G. Это вложение задается фиксированием инвариантных относительно присоединенного представления полиномов

$$P_{k_j}(\phi) = c_j, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где n – ранг группы G.

Для перехода к суперсимметричному случаю удобно воспользоваться языком суперпространства, каждая точка которого имеет обычные координаты x_1, x_2 и дополнительные антикоммутирующие координаты $\theta_a (a = 1, 2)$. Мы будем считать $\theta_2 = \theta_1^*$, где звездочка означает инволюцию в грассмановой алгебре (о грассмановой алгебре см. [10]).

Инволютивная связь θ_1 и θ_2 согласуется в эвклидовом случае с инвариантностью относительно вращений; при этом две, вообще говоря

[1)] Суперсимметричное обобщение обычного n-поля содержится в [7, 8] для псевдоэвклидового случая суперсимметричное обобщение киральных моделей изучалось в [9].

различных постановки задачи (решения, не зависящие от времени в $2+1$ теории и решения в $1+1$ теории после виковского поворота) совпадают.

Определим γ-матрицы Дирака и спиноры Ψ и $\bar{\Psi}$ следующим образом

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^+ \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^5, \qquad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta^* \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Theta} = (\theta^*, -\theta).$$

Киральным суперполем $\hat{\phi}$ мы будем называть поле определенное на суперпространстве и принимающее значение в грассмановой алгебре, причем поле удовлетворяет условиям типа (1):

$$P_{k_j}(\hat{\phi}) = c_j, \qquad j = 1, \dots n. \tag{1'}$$

При этом c – числовая компонента ϕ поля $\hat{\phi}$ совпадает с обычным киральным полем.

Для существенного суперполя $\hat{\phi}(x_1, x_2, \theta, \theta^*)$ имеет место разложение

$$\hat{\phi} = \phi + \bar{\Theta}\Psi + \frac{1}{2}\bar{\Theta}\Theta F = \phi + \theta^*\psi - \theta\psi^+ + \theta^*\theta F, \tag{3}$$

причем поля $\phi = \phi^+$ и $F = F^+$ принадлежат четному, а ψ, ψ^+ нечетному компоненту грассмановой алгебры.

В суперпространстве имеются четыре независимых сдвига по x_1, x_2, θ и θ^*. Из генераторов этих сдвигов можно построить генераторы суперпреобразований

$$E = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\theta\partial, \qquad \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial\theta^*} + i\theta^*\bar{\partial} \tag{4}$$

где

$$\partial = \partial/\partial z = \tfrac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \qquad \bar{\partial} = \partial/\partial\bar{z} = \tfrac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2), \qquad z = x_1 + ix_2 \tag{5}$$

и операторы дифференцирования, антикоммутирующие с E и $\bar{E}$:

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\partial, \qquad \bar{D} = -\frac{\partial}{\partial\theta^*} - i\theta^*\bar{\partial}. \tag{6}$$

Отметим, что E и $\bar{E}$, соответственно D и $\bar{D}$ являются "сопряженными" относительно формы

$$\langle A, B \rangle = \int d^2\theta d^2x\, A^* \cdot B, \tag{7}$$

т. е., например

$$\langle A, EB \rangle = (-1)^{\deg A} \langle \bar{E}A, B \rangle.$$

Мы будем считать, что поле $\hat{\phi}$ достаточно быстро стремится к пределу $\hat{\phi}_0$ при $|z| \to \infty$. Для такого поля можно определить величину Q (аналог топологического заряда) согласно формуле

$$Q = c^{-1} \int d^2\theta\, d^2x (\hat{\phi}, [\bar{D}\hat{\phi}, D\hat{\phi}]_+). \tag{8}$$

Здесь $(\cdot,)$ – скалярное произведение в алгебре Ли $\mathcal{Y}$. Величина Q принимает значение на четном компоненте грассмановой алгебры, причем c – числовая часть выражения (8) совпадает с обычным определением топологического заряда [3]. Это нетрудно увидеть, расписывая (8) по компонентам и проводя интегрирование по θ и θ^*.

$$Q = c^{-1} \int d^2x \{ i\epsilon^{\mu\nu}(\phi, [\partial_\mu \phi, \partial_\nu \phi]) + 3(\Psi\gamma^5\Psi, F) + i([\phi, \bar{\Psi}], \gamma^\mu \partial_\mu \Psi) +$$

$$+ 2i(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \partial_\mu \phi)\}, \quad \mu, \nu = 1, 2. \tag{9}$$

Не трудно обобщать на суперсимметричный случай и функционал действия (энергии) для кирального поля [3].

$$S = \frac{1}{2} \int d^2\theta d^2x \{(D\phi, D\hat{\phi}) - ([\hat{\phi}, \bar{D}\hat{\phi}], [\hat{\phi}, D\hat{\phi}])\}. \tag{10}$$

Так же как и в киральной теории в нашем случае важную роль играют "уравнения дуальности"

$$D\hat{\phi} = [\hat{\phi}, D\hat{\phi}], \qquad \bar{D}\hat{\phi} = -[\hat{\phi}, \bar{D}\hat{\phi}]. \tag{11}$$

Нетрудно показать, что "уравнения движения" (уравнения Эйлера), следующие из условия $\delta S = 0$ с учетом условий (1'), при выполнении условий (11) также выполняются. Можно показать также, что как и в случае обычной киральной теории в суперсимметричном случае из уравнений дуальности следует

$$S = cQ, \tag{12}$$

причем c – числовая часть дает нам точную оценку снизу для действия S, а грассманова часть равна значению действия в стационарной точке.

В заключение рассмотрим подробнее суперсимметричное обобщение киральной теории, когда поле $\phi(x)$ принимает значения в комплексном проективном пространстве: $\Phi = \mathbb{C}P^n$ [2, 4]. В этом случае суперполе $\hat{\phi}$ можно представить с помощью $(n+1)$-мерного вектора $\hat{\mathrm{u}} = (\hat{u}^{(1)}, \ldots, \hat{u}^{(n+1)})$

$$\hat{\phi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{n+1}\delta_{\alpha\beta} - \hat{u}_\alpha \hat{\bar{u}}_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, \qquad n+1, \tag{13}$$

где

$$\hat{u}_a = u_a + \theta^* \psi_a - \theta \chi_a^* + \theta^* \theta F_a \tag{14}$$

и удовлетворяет условию

$$(\hat{\bar{u}}, \hat{u}) = \Sigma\, \hat{\bar{u}}_a \hat{u}_a = 1, \tag{15}$$

а поля u_a, ψ_a, χ_a и F_a удовлетворяют дополнительным алгебраическим условиям

$$(\bar{u}, u) = 1, \quad (\vec{\chi} u) + (\bar{u}\vec{\psi}) = 0, \quad (\bar{u} F) + (\bar{F} u) - (\vec{\psi}^* \vec{\psi}) + (\vec{\chi}\vec{\chi}^*) = 0. \tag{16}$$

В этом случае выражения для S и Q имеют вид

$$S = \int d^2\theta d^2 x \{(\bar{D}\hat{\bar{u}}, D\hat{u}) + (\bar{D}\hat{u}, D\hat{\bar{u}}) + (\hat{\bar{u}}, \bar{D}\hat{u})(\hat{\bar{u}}, D\hat{u}) + (\hat{u}, \bar{D}\hat{\bar{u}})(\hat{u}, D\hat{\bar{u}})\} \tag{17}$$

$$Q = c^{-1}\int d^2\theta d^2 x \{(\hat{\bar{u}}, \bar{D}\hat{u})(\hat{u}, D\hat{\bar{u}}) - (\hat{\bar{u}}, D\hat{u})(\hat{u}, \bar{D}\hat{\bar{u}}) - (\bar{D}\hat{u}, D\hat{\bar{u}}) - (D\hat{u}, \bar{D}\hat{\bar{u}})\}, \tag{18}$$

а уравнения дуальности таковы

$$D\hat{u} = \hat{u}(\hat{\bar{u}} D\hat{u}), \qquad \bar{D}\hat{u} = -\hat{u}(\hat{\bar{u}}\bar{D}\hat{u}). \tag{19}$$

После перехода к неоднородным координатам

$$\hat{w}^j = \hat{u}^j (\hat{u}^{n+1})^{-1}, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{20}$$

уравнения дуальности принимают вид

$$\bar{D}\hat{w}^j = 0 \qquad (\text{или } D\hat{w}^j = 0), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\hat{w}^j(x_1, x_2, \theta, \theta^*) = w^j(z) + \theta\tilde{w}^j(z), \tag{22}$$

где $w^j(z)$ и $\tilde{w}^j(z)$ являются аналитическими функциями z на всей плоскости z, включая бесконечноудаленную точку и потому являются рациональными функциями, причем w^j принимает значения на четном, а $\tilde{w}^j$ на нечетном компоненте грассмановой алгебры.

Можно показать, что аналогичное утверждение справедливо (после введения соответствующих координат) и для случая, когда поле $\hat{\phi}$, таково, что его c – числовая часть принимает значения в орбите присоединенного представления произвольной компактной группы Ли, в частности для случая комплексных грассмановых многообразий в качестве $\hat{u}$ следует взять $N \times k$ матрицу $\hat{U}$, причем $\hat{U}^+\hat{U} = I$.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
26 февраля 1979 г.

Литература

[1] В.Е.Захаров, А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, 27, 47, 1978.

[2] В.Е.Захаров, А.В.Михайлов. ЖЭТФ, 74, 1953, 1978.
[3] V.L.Golo. A.M.Perelomov. Lett., Math. Phys., 2, 477, 1978.
[4] V.L.Golo, A.M.Perelomov. Phys. Lett., B79, 112, 1978.
[5] A.M.Perelomov. Comm. Math. Phys., 63, 237, 1978.
[6] А.А.Белавин. А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 22, 503, 1975.
[7] P.Di Vecchia, S.Ferrara. Nucl. Phys., B130, 93, 1977.
[8] E.Witten. Phys. Rev., D16, 2991, 1977.
[9] А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, 28, 554, 1978.
[10] Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования, М., изд. Наука, 1965.