Письма в ЖЭТФ, том 36, вып. 7, стр. 244 – 247 *5 октября 1982 г.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТИЦ С АКУСТИЧЕСКИМИ СОЛИТОНАМИ В МЕТАЛЛАХ

В.Я.Демиховский, Г.М.Максимова, В.Е.Сауткин

Исследуются акустические солитоны в металлической пластине, помещенной в квантующее магнитное поле, когда электронная нелинейность много больше решеточной. Найден закон затухания амплитуды солитона при бесстолкновительном и столкновительном затухании.

В работе рассматривается взаимодействие резонансных электронов с акустическими солитонами (импульсами сжатия) в металлах. Для существования акустического солитона необходимо, как известно, чтобы нелинейный и дисперсионный члены в волновом уравнении были больше слагаемого, описывающего затухание. В работе [1] показано, что в квантующем магнитном поле нелинейная восприимчивость может на несколько порядков превосходить электронную нелинейную восприимчивость в отсутствие поля. Дисперсия может быть получена, например, за счет ограниченности размеров образца. Поэтому мы будем рассматривать акустические солитоны в металлических пластинах (стержнях) помещенных в квантующее магнитное поле[1)].

Уравнение теории упругости для основной симметричной моды, распространяющейся вдоль оси x, при $d/L \ll 1$, где d – толщина пластины, имеет вид

$$u_{tt} = c_0^2 u_{xx} + \gamma c_0^2 d^2 u_{xxxx} + \frac{\Lambda}{\rho}\frac{\partial n}{\partial x}. \tag{1}$$

Здесь $c_0 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\sigma)^2}}$ $\gamma = \dfrac{\sigma^2}{12(1-\sigma)^2}$, E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, Λ – константа деформационного потенциала. Вклад нерезонансных частиц в неравновесную концентрацию квадратичный по амплитуде волны найдем в локальном приближении по формуле

$$\delta n^{(2)} = \chi \Lambda^2 (u_x)^2$$

$$\chi = \frac{eH}{2\pi^2\hbar^2 v_c}\sum_{n=0}^{n_F}\int dp_x \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon^2}, \qquad \chi_{max} = \frac{eH}{2\pi^2\hbar v_c}\frac{(2m)^{1/2}}{(kT)^{3/2}}, \tag{2}$$

где H – напряженность магнитного поля, e – заряд электрона, v_c – скорость света, суммирование идет по всем заполненным уровням, p_x – проекция импульса на направление магнитного поля, ϵ – энергия электрона. Формула (2) описывает осцилляторную зависимость нелинейной восприимчивости от поля со значением в максимуме χ_{max}.

Выражение (2), как показано в работе [3], справедливо при условии $q^2/m \ll kT$, $mc_0^2 \ll \ll kT$, когда $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ и при $\omega\tau \ll 1$, $qR \ll 1$ при $\mathbf{q} \perp \mathbf{H}$, где R – ларморовский радиус, m – масса электрона, k – постоянная Больцмана.

Уравнение (1) с учетом (2) имеет вид

$$u_{tt} = c_0^2 u_{xx} + \gamma c_0^2 d^2 u_{xxxx} + \frac{\Lambda^3}{\rho}\chi u_x u_{xx} + f(u), \tag{3}$$

где функционал $f(u)$ описывает затухание. В отсутствие затухания уравнение (3) имеет решение в виде уединенной волны – импульса сжатия

$$u(x,t) = u_0(\mathrm{th}(x-ct)/L - 1). \tag{4}$$

Здесь $L = 12\gamma c_0^2 d^2 \rho/\Lambda^3 \chi u_0$ – ширина солитона, $c^2 = c_0^2(1 + 4\gamma \dfrac{d^2}{L^2})$ – скорость волны. Рассмотрим влияние затухания на распространение солитона. Считая амплитуду u_0 в (4) медленной функцией $(x-ct)$ нетрудно получить с помощью (3) следующее соотношение

$$\frac{d\mathcal{H}}{dx} = -\rho\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u_x f(u), \tag{5}$$

где $\mathcal{H}$ – гамильтониан системы, описываемой уравнением (3) без последнего слагаемого. Для решения (4)

$$\mathcal{H} = \frac{2\kappa}{3}u_0^3\left(1 + \frac{c^2}{c_0^2} + \frac{8}{3}\gamma\frac{u_0^2}{u_0^2(0)}\frac{d^2}{L^2}\right), \qquad \kappa = \frac{\Lambda^2\chi}{12\gamma d^2}. \tag{6}$$

Найдем функцию $f(u)$ для различных ориентаций магнитного поля. При распространении вдоль поля $f(u) = (\Lambda/\rho)(\partial n_{рез}/\partial x)$, где $n_{рез}$ – концентрация резонансных электронов. Будем считать, что условие гигантских квантовых осцилляций $ql(\hbar\omega_c/\epsilon_F)^{1/2} \gg 1$, $(q \propto L^{-1})$ не выполнено, и, следовательно, взаимодействие солитона с резонансными электронами можно рассмат-

---

[1)] В работе Островского и Сутина [2] рассмотрены акустические солитоны в пластинах и стержнях и показано, что за счет решеточной нелинейности солитоны могут быть сформированы на расстояниях 10^3 см. В этом случае трудно реализовать условия, при которых нелинейный член в уравнении упругости больше слагаемого, ответственного за затухание ривать классически. $n_{\text{рез}}$ найдем из кинетического уравнения для резонансных электронов, которое в силу сказанного может быть записано, как в отсутствие магнитного квантования.

Добавка к локально равновесной функции распределения $g(\mathrm{v}_x,\ x-ct)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathrm{v}_x \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \mathrm{v}_x} + \frac{g}{\tau_p} = -F_0'(\epsilon_\perp)\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{7}$$

где для решения (4) $\Phi(x-ct) = \Lambda \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\Phi_0}{\mathrm{ch}^2 \frac{x-ct}{L}}$, $\Phi_0 = \frac{\Lambda u_0}{L}$, $\epsilon_\perp$ – энергия движения в плоскости перпендикулярной H. Вводя безразмерные переменные $\xi = \frac{x-ct}{L}$, $s = \frac{\mathrm{v}_x - c}{\tilde{\mathrm{v}}}$, $\Psi = \frac{\Phi(\xi)}{\Phi_0}$, $\tilde{\mathrm{v}} = \sqrt{\Phi_0/m}$ и параметр $a = L/\tilde{\mathrm{v}}\tau_\mathrm{p}$ (τ_p – время релаксации) перепишем (7) в виде

$$s\frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial s} + ag = \frac{F_0'(\epsilon_\perp)\Phi_0 c}{\tilde{\mathrm{v}}}\frac{d\Psi}{d\xi}. \tag{8}$$

Решение данного уравнения в переменных t и E может быть представлено в виде

$$g(t,E) = \frac{\Phi_0 c}{\tilde{\mathrm{v}}} F_0'(\epsilon_\perp)\int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-\tau)}\frac{d\Psi}{d\xi}d\tau. \tag{9}$$

Здесь t – время движения по траектории

$$\frac{s^2}{2} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\xi} = E, \qquad s = \frac{d\xi}{dt} \tag{10}$$

E – энергия, которая для частиц, захваченных ямой, отрицательна и положительна для пролетных частиц. В нелинейном режиме ($a \ll 1$) решение для функции распределения захваченных и пролетных частиц имеет вид

$$g_{\text{зах}} = F_0'(\epsilon_\perp)\frac{\Phi_0 c}{\tilde{\mathrm{v}}}\{-s(t,E) + a\xi(t,E)\}, \qquad |s| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{ch}\,\xi}, \tag{11}$$

$$g_{\text{пр}} = F_0'(\epsilon_\perp)\frac{\Phi_0 c}{\tilde{\mathrm{v}}}\{-s(t,E) + s(-\infty,E) + a[\xi(t,E) - s(-\infty,E)t]\}, \quad |s| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{ch}\xi}. \tag{12}$$

Функция $g(s,\xi)$ определяет концентрацию резонансных частиц

$$n_{\text{рез}} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int d\mathbf{p}\, g(\mathrm{v}_x, x-ct, \epsilon_\perp). \tag{13}$$

Подставляя формулу (5) $f(u) = \frac{\Lambda}{\rho}\frac{\partial n_{\text{рез}}}{\partial x}$ представим правую часть (6) в виде

$$-\Lambda\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\int g\frac{2d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{14}$$

Подставляя в (14) функции распределения захваченных и пролетных частиц (11) получим

$$\frac{d\mathcal{H}}{dx} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{a}{\pi\hbar^3}\Phi_0^2 m^2 c. \tag{15}$$

Для пролетных частиц интеграл (14) вычисляется в переменных $t,\ E,\ \epsilon_\perp$, а для захваченных в переменных $\xi,\ s,\ \epsilon_\perp$. При этом оказывается, что вклад пролетных частиц в $d\mathcal{H}/dx$ равен вкладу захваченных частиц. Из (15) и (16) найдем закон затухания амплитуды солитона

$$u_0(x) = u_0(0)\left(1 - \frac{x}{l}\right), \qquad l = \frac{\sqrt{2}\pi\hbar^3 \rho c}{m^2 \Lambda^2} \tilde{v}(0)\tau_p . \tag{16}$$

Можно показать, что в области x, где $a \gtrsim 1$ закон затухания (16) переходит в

$$u_0(x) = u_0(0) / (1 + x/l_Б), \quad l_Б = \frac{2\pi^2}{9\zeta(3)} \frac{\epsilon_F}{n_0} \frac{\rho c_0 v_F}{\Lambda^2} L(0) \tag{16a}$$

аналогично работе [5]. Здесь $\zeta(3)$ – дзета-функция Римана.

Когда вектор **H** перпендикулярен плоскости пластины, затухание носит столкновительный характер и последнее слагаемое в (3) определяется выражением (см. [4])

$$f(u) = \frac{2}{15} \frac{n_0 m v_F^2}{\rho} \tau_p \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \tag{17}$$

где n_0 – равновесная концентрация, v_F – скорость Ферми. В этом случае из (17), (6) и (5) найдем закон затухания амплитулы солитона.

$$u(x) = u_0(0) / (1 + x/l_c)^{1/2}, \quad l_c^{-1} = \frac{2\pi}{15} \frac{n_0 m}{\rho c_0} \frac{v_F^2 \tau_p}{L^2(0)} . \tag{18}$$

Проведем численные оценки параметров солитонов. Для типичных параметров металла $\Lambda \sim 10$ эВ, $c_0 = 3 \cdot 10^5$ см/с при $T \sim 1$К, $H \sim 10^4$ Э, $d \approx 0{,}03$ см и деформациях не превышающих значения 10^{-4} из (2а) и 4 найдем $L \sim 0{,}01$ см. При этом затухания при $\tau_p \approx 10^{-8}$ с (предполагается, что отражение зеркальное) согласно (16) и (18) много больше размеров солитона.

Литература

1. *Демиховский В.Я., Копасов А.П.* ФТТ, 1971, **13**, 2468.
2. *Копасов А.П.* ЖЭТФ, 1975, **69**, 2162.
3. *Островский Л.А., Сутин А.М.* ПММ, 1977, **41**, 531.
4. *Кулик И.О.* ЖЭТФ, 1964, **47**, 107.
5. *Ott R., Sudan R.N.* Phys. Fluids, 1969, **12**, 2338.

Горьковский
исследовательский физико-технический институт
при Горьковском государственном университете

Поступила в редакцию
3 июля 1982 г.