Письма в ЖЭТФ, том 36, вып.9, стр. 318 – 320 *5 ноября 1982 г.*

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА ДРЕЙФОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ

Г.В.Ступаков

Получено выражение для гамильтониана, описывающего дрейфовое движение с точностью до членов, квадратичных по ларморовскому радиусу.

Во многих задачах физики высокотемпературной плазмы, связанных с удержанием частиц в ловушках, а также в астрофизических приложениях, возникает проблема исследования движения заряженной частицы в заданном электромагнитном поле. В практически важном случае медленно меняющихся в пространстве и во времени полей ее решение значительно упрощается, если воспользоваться дрейфовым приближением [1,2]. Основным малым параметром дрейфовой теории (для простоты ниже будем говорить о стационарных полях и нерелятивистском движении) является отношение $r_л / l \equiv \epsilon$, где $r_л = mvc/eB$ – ларморовский радиус частицы, а l – характерный масштаб изменения полей. Обычно используется первое приближение по параметру ϵ, т.е. учет скоростей дрейфа $v_D \sim \epsilon v$ и поправки к продольной скорости того же порядка.

Между тем в некоторых задачах точности первого приближения дрейфовой теории оказывается недостаточно (например, при вычислении коэффициента стохастической диффузии в длинных магнитных ловушках [3]). В настоящем сообщении получены выражения для дрейфов второго порядка в криволинейных координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3, естественным образом связанных с магнитным полем:

$$\mathbf{B} = [\nabla\xi^1 \times \nabla\xi^2]. \qquad (1)$$

Соответствующие уравнения движения имеют гамильтонову форму.

Хотя то обстоятельство, что дрейфовое движение допускает гамильтонову формулировку, известно уже давно [4,5], при традиционном подходе оно обычно игнорировалось. В результате, например, сохранение продольного адиабатического инварианта, которое в гамильтоновом подходе вытекает из общих теорем механики, требовало специального доказательства [1,2]. Простота гамильтонового описания выявляется и при сравнении нашего результата (особенно в случае потенциального магнитного поля) с результатами работы [6], где приведены выражения для дрейфов второго порядка в векторной записи. Отметим еще недавнюю работу [7], где также построен дрейфовый гамильтониан, но с точностью до членов $\sim \epsilon$.

Выберем в качестве обобщенных координат криволинейные координаты ξ^i и запишем гамильтониан частицы в магнитном поле:

$$H(\xi^i, p_i) = \frac{1}{2m} g^{ik}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\left[p_i - \frac{e}{c}A_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\right]\left[p_k - \frac{e}{c}A_k(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\right], \tag{2}$$

где g^{ik} обозначает контравариантные компоненты метрического тензора, p_i – обобщенные импульсы, а A_i – ковариантные компоненты векторного потенциала, в качестве которых выберем набор $A_i = (0, \xi^1, 0)$. Совершим каноническое преобразование от переменных p_i, ξ^i к новым переменным $J_\perp, \varphi$; P, Q; $p_\|, s$ с помощью производящей функции $F(\xi^1, \varphi; \xi^2, Q; \xi^3, p_\|)$:

$$F = \frac{e}{2cg^{22}}(B \operatorname{ctg}\varphi - g^{12})\left(\xi^2 - Q - \frac{c}{e}\frac{g_{13}}{g_{33}}p_\|\right)^2 + \frac{e}{c}\xi^1(\xi^2 - Q) + p_\| \frac{g_{23}}{g_{33}}(\xi^2 - Q) + p_\| \xi^3,$$

где $B(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ – модуль магнитного поля. В однородном магнитном поле, B-const, метрические коэффициенты являются постоянными, и для новых переменных справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned}
&J_\perp = \frac{cm^2}{2eB}v_\perp^2, && \varphi = \arccos\frac{\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{a}^2}{v_\perp\sqrt{g^{22}}};\\
&P = p_2, && Q = \xi^2 - \frac{c}{e}p_1;\\
&p_\| = p_3, && s = \xi^3 + \frac{c}{e}\frac{g_{23}}{g_{33}}p_1 - \frac{c}{e}\frac{g_{13}}{g_{33}}\left(p_2 - \frac{e}{c}\xi^1 - \frac{g_{23}}{g_{33}}p_3\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{a}^2 = \nabla\xi^2$, а $\mathbf{v}_\perp$ – перпендикулярная к магнитному полю составляющая скорости. Как видно, $J_\perp$ только множителем cm/e отличается от магнитного момента частицы, φ – это ларморовская фаза, отсчитываемая от направления $\mathbf{a}^2$, а $p_\|$ – составляющая импульса частицы вдоль магнитного поля. Остальные три переменные с точностью до $r_л$ определяют положение частицы [1]:

$$\xi^1 = \frac{c}{e}P + O(r_л), \quad \xi^2 = Q + O(r_л), \quad \xi^3 = s + O(r_л). \tag{4}$$

В неоднородном магнитном поле при вычислении частных производных F по ξ^i нужно дифференцировать компоненты метрического тензора. В результате в соотношениях (3) появятся дополнительные малые члены $\sim \epsilon$. Выражая старые переменные через новые и подставляя их в (2), получим гамильтониан в новых переменных, который нужно затем усреднить по φ [8]. Опуская промежуточные вычисления, запишем дрейфовый гамильтониан в виде $H = H_0 + H_1$, где $H_1 \sim \epsilon H_0$:

$$H_0 = \frac{eB}{mc}J_\perp + \frac{p_\|^2}{2m} \tag{5}$$

$$H_1 = \frac{B^2}{m}J_\perp p_\| \left[\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{g_{23}}{B}\right) - \frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{g_{13}}{B}\right) + (g_{23})^2\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{g_{13}}{Bg_{23}}\right) - \frac{g^{22}}{2B^3}\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{g^{12}}{g^{22}}\right)\right] + \frac{c}{me}p_\|^3 g_{13}\frac{\partial g_{23}}{\partial\xi^3}$$

(для простоты здесь принято $g_{33} \equiv 1$, что соответствует отождествлению ξ^3 с длиной дуги вдоль силовой линии). Зависящие от ξ^i метрические коэффициенты и функцию B нужно выразить через новые переменные по формулам (4) (отбрасывая в них члены $\sim O(r_л)$).

Примечательно, что уже слагаемое H_0 описывает дрейфы первого порядка (центробежный и градиентный). Из гамильтониана $H_0 + H_1$ следуют уравнения для $\dot P$, $\dot Q$, $\dot p_\|$, справедли-

---

[1] Если система координат выбрана таким образом, что $g_{13} = g_{23} = 0$, то, как можно показать, набор $(\frac{c}{e}P, Q, s)$ задает координаты центра ларморовской окружности, хотя в общем случае это не так.

вые с точностью до членов $\sim O(\epsilon^3)$ ($J_\perp$ в этом приближении является интегралом движения). Выражение для $\dot{s} = \partial H / \partial p_\parallel$ имеет меньшую точность, порядка $O(\epsilon^2)$, что, впрочем, не очень существенно, так как во многих приложениях часто бывает достаточно ограничиться даже нулевым приближением для $\dot{s}$: $\dot{s} = \partial H_0 / \partial p_\parallel = p_\parallel / m$. Отметим значительное упрощение гамильтониана H_1 в потенциальном поле, где можно выбрать систему координат, так, что $g_{13} = g_{23} = 0$ (отождествляя ξ^3 с магнитным потенциалом).

В заключение приведем еще выражение для вклада в гамильтониан, связанного с электрическим потенциалом $\varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. При этом к H_0 добавляется слагаемое $e\varphi\left(\frac{c}{e}P, Q, s\right)$, а к H_1 – слагаемое

$$c p_\parallel \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^1} g_{23} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^2} g_{13} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^3} g_{13} g_{23} \right).$$

Литература

1. *Морозов А.И., Словьев Л.С.* В сб. „Вопросы теории плазмы", М.: Госатомиздат, 1963, 2,177.
2. *Нортроп Т.* Адиабатическая теория движения заряженных частиц,М.: Атомиздат, 1967.
3. *Рютов Д.Д., Ступаков Г.В.* Письма в ЖЭТФ, 1977, **26**,182 .
4. *Gardner C.S.* Phys.Rev., 1959, **115**, 791
5. *Крускал М.* Адиабатические инварианты. М.: ИИЛ, 1962.
6. *Northrope T.G., Rome J.A.* Phys. Fluids, 1978, **21**, 384.
7. *White R.B., Boozer A.H., Hay R.* Phys. Fluids, 1982, **25**, 575.
8. *Chirikov B.V.* Phys. Reports, 1979, **52**, 263.

Институт ядерной физики
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
22 июня 1982 г.