Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.1, стр. 10 – 14 5 июля 1980 г.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ НЕ БАКСТЕРОВСКОГО ТИПА

Р.З.Бариев

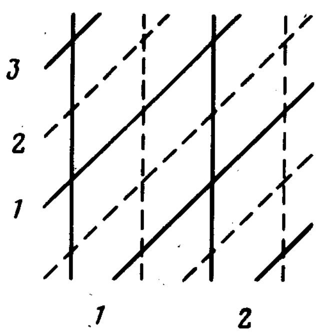
Получено точное решение двумерной вершинной модели во внешнем электрическом поле, удовлетворяющей правилу льда. Рассматриваемая модель, в отличие от обобщенной модели Бакстера, образована двумя типами чередующихся узлов.

В статистической механике существует целый ряд нетривиальных двумерных моделей взаимодействующих частиц, допускающих точное решение. Бакстер в недавней работе [1] показал, что все эти модели можно рассматривать как частные случаи точно решаемой обобщенной восьмивершинной модели [2]. Обобщенная модель определена Бакстером на плоской решетке с координационным числом 4, вершинные множители которой a_j, b_j, c_j и d_j в каждом узле удовлетворяют условиям

$$(a_j^2 + b_j^2 - c_j^2 - d_j^2)/a_j b_j = C_1, \quad c_j d_j / a_j b_j = C_2, \tag{1}$$

где C_1 и C_2 – постоянные, не зависящие от номера узла j.

В настоящей работе мы рассматриваем систему, образованную двумя взаимодействующими восьмивершинными моделями и находим ее решение в частном случае, который явно не сводится к бакстеровскому типу, определенному соотношениями (1).



Рассмотрим решетку из $2M$ строк и $2N$ столбцов (см. рис.1). Решетка состоит из двух подрешеток, образованных соответственно сплошными и пунктирными линиями. При этом возникают два типа узлов, образованных пересечением однотипных и разнотипных линий. На каждом ребре решетки поместим стрелку, направленную к одному из узлов решетки. В узлах первого типа допустим восемь стандартных конфигураций [2], приписывая им вершинные статистические веса

$$w_1 = w_2 = a, \quad w_3 = w_4 = b, \quad w_5 = w_6 = c, \quad w_7 = w_8 = d. \tag{2}$$

В узлах второго типа допустим лишь первые четыре конфигурации

$$w'_1 = w'_2 = g, \quad w'_3 = w'_4 = h. \tag{3}$$

Ограничимся изучением частного случая, отвечающего системе двух плоских ферроэлектриков ($d = 0$), взаимодействующих между собой с силой $a = 2 \ln (g / h)$ при дополнительном условии $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Этот случай соответствует модели явно не бакстеровского типа, поскольку параметр C_1 в узлах различного типа принимает два различных значения.

Вычисление свободной энергии f рассматриваемой системы во внешнем электрическом поле стандартным образом [2 – 4] сводится к нахождению наибольшего собственного значения Λ_{max} матрицы перехода T

$$-\beta f = \frac{1}{4} \max_{y_1, y_2} \lim_{N \to \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln [\Lambda_{max}(m, n)] + E_1 y_1 + E_2 y_2 \right\},$$

$$y_1 = 2(1 - m/N), \; y_2 = 2[1 - (n - m)/N], \tag{4}$$

где E_1 и E_2 – внешние электрические поля, приложенные к первой и второй подрешеткам соответственно; m $(n - m)$ – число стрелок, направленных вниз в некоторой строке ребер с нечетным номером, принадлежащих первой (второй) подрешетке. Матрица перехода T состоит из отдельных блоков T (m, n), отвечающих различным значениям m и n. Пусть $\Psi_{r_1 \ldots r_n}(x_1, \ldots, x_m | x_{m+1}, \ldots, x_n)$ – амплитуда состояния нечетного ряда, когда стрелки, направленные вниз, находятся на ребрах $(x_1, r_1), \ldots, (x_m, r_m)$ первой подрешетки и ребрах $(x_{m+1}, r_{m+1}), \ldots, (x_n, r_n)$ второй подрешетки, $r_i = 1, 2$ соответственно тому является ли i ребро наклонным или вертикальным. Матрица перехода связывает между собой амплитуды двух последовательных строк с нечетными номерами

$$\Lambda(m, n)\, \Psi_{\vec{r}}(\mathbf{x}) = \sum_{\{\mathbf{x}', \vec{r}'\}} T(m, n)_{\vec{r}\vec{r}'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\, \Psi_{\vec{r}'}(\mathbf{x}'). \tag{5}$$

Область определения $\Psi_{\vec{r}}(\mathbf{x})$ разобьем на отдельные подобласти

$$1 \leqslant x_{Q_1} \leqslant x_{Q_2} \leqslant \ldots \leqslant x_{Q_n} \leqslant N, \tag{6}$$

где $[Q_1, \ldots, Q_n]$ – перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Знак равенства между x_{Q_i} и $x_{Q_{i+1}}$ в (6) возможен только в следующих случаях: (1) $Q_i \leqslant m$, $Q_{i+1} > m$; (2) $Q_i \leqslant m$, $Q_{i+1} \leqslant m$, $r_{Q_i} = 1$, $r_{Q_{i+1}} = 2$; (3) $Q_i > m$, $Q_{i+1} > m$, $r_{Q_i} = 1$, $r_{Q_{i+1}} = 2$.

В каждой из подобластей (6) амплитуду $\Psi_r(x)$ будем искать в виде обобщенного анзатца Бете [5, 6]

$$\Psi_{r_1 \ldots r_n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_P A^{\Delta_{Q_1} \ldots \Delta_{Q_n}}_{P_1 \ldots P_n} \prod_{j=1}^{n} \exp\left[\left(\frac{1}{2}\Delta_{Q_j} - 1\right) \times \right.$$

$$\left. \times k_{P_j}\right] \Psi^{(\nu_{P_j}, k_{P_j})}_{r_{Q_j}}(x_{Q_j}), \qquad (7)$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $[P_1, \ldots, P_n]$ чисел $1, 2, \ldots, n$,

$$\Psi^{(\nu_P, k_P)}_{1, 2}(x_Q) = \exp\left[i k_P x_Q \mp \frac{1}{2}\left(M_P + \frac{1}{2} k_P\right)\right],$$

$$\nu_P = \pm 1,$$

$$M_p = \arc\sin[b \sin(k/2)], \ \nu_P \cos M_p \geqslant 0, \ \bar{b} = b/c,$$

$\Delta_Q = 1{,}2$ соответственно для $Q \leqslant m$ и $Q > m$.

Выражение (7) определяет решение уравнений (5), если коэффициенты $A^{\Delta_Q}_P$ удовлетворяют условиям

$$A^{\Delta_1 \ldots \Delta_i \Delta_{i+1} \ldots \Delta_n}_{P_1 \ldots P_i P_{i+1} \ldots P_n} =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} S^{\Delta_i \Delta_{i+1}}_{\alpha\beta}(M_{P_i} - M_{P_{i+1}}) A^{\Delta_1 \ldots \alpha\beta \ldots \Delta_n}_{P_1 \ldots P_{i+1} P_i \ldots P_n}, \qquad (8)$$

$$A^{\Delta_1 \ldots \Delta_n}_{P_1 \ldots P_n} = A^{\Delta_2 \ldots \Delta_n \Delta_1}_{P_2 \ldots P_n P_1} \exp(i k_{P_1} N),$$

где S — точная двухчастичная S-матрица

$$S^{\lambda a}_{a' \lambda'} = \sum_{k=1}^{4} \omega^k \sigma^k_{aa'} \sigma^k_{\lambda\lambda'},$$

$$\omega^1 = \omega^2 = -i \,\mathrm{sh}\, a / 2 \sin(M + ia), \ \omega^{3,4} = -\frac{1}{2}\left[1 \pm \sin M / \sin(M + ia)\right]. \qquad (9)$$

Доказательство этого утверждения, наряду с более подробным изучением представленной модели будет опубликовано позднее.

Совместность уравнений (8) гарантируется тем, что S-матрица удовлетворяет соотношению Бакстера — Янга [4, 6]. В уравнениях (8) неизвестными являются величины k_j, через которые выражаются собственные значения матрицы $\mathbf{T}(m, n)$. Решение уравнений (8) находится с помощью повторного применения обобщенного анзатца Бете [6] и сводится к решению следующей системы нелинейных уравнений

$$k_j N = 2\pi I_j + \sum_{\beta=1}^{m} \phi(M_j - \Lambda_\beta), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \phi(\Lambda_\beta - M_j) = 2\pi J_\beta + \sum_{\gamma=1}^{m} \Phi(\Lambda_\beta - \Lambda_\gamma),$$

$$\beta = 1, 2, \ldots, m, \tag{10}$$

$$\exp[i\Phi(M)] = -\sin(M - ia)/\sin(M + ia), \quad a' = a/2,$$

$$\exp[i\phi(M)] = -\sin(M - ia')/\sin(M + ia'),$$

где для четного n I_j – полуцелые числа, J_β – целые (полуцелые) числа для нечетного (четного) m.

Уравнения (10) позволяют, в принципе, найти весь спектр матрицы перехода, а следовательно изучить все статические свойства рассматриваемой модели.

В пределе $N \to \infty$ уравнения (10) стандартным образом [5 – 7] заменяются линейными интегральными уравнениями. В случае $n = 2m = 2N$, соответствующем Λ_{max}, эти уравнения решаются с помощью преобразования Фурье и приводят к следующему выражению для свободной энергии в "физической" области ($\bar{b} < 1$)

$$-\beta f = \frac{1}{2} \ln(ah) - \operatorname{sign}(a) \int_0^\pi \ln\left[\cos p + \sqrt{(a/b)^2 + \cos^2 p}\right] v(p)\, dp \tag{11}$$

где

$$v(p) = (2\pi)^{-1}\left(\frac{dL}{dp}\right)\left[1 + \sum_{l=1} v_l \cos(2lL)\right],$$

$$v_l = \frac{4\exp(-n|a|)}{\pi \operatorname{ch}(na)} \int_0^{\pi/2} \cos(2lL)\, dp,$$

$$L = L(p) = \arcsin(\bar{b}\sin p), \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant L(p) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Первый порядок по $\bar{b}$ выражения (11) соответствует энергии основного состояния одномерной модели Хаббарда [7].

В отличие от ранее изученных моделей, удовлетворяющих правилу льда [1 – 3], данная модель обнаруживает фазовый переход первого рода по параметру взаимодействия a ($a_{кр} = 0$).

Автор благодарен М.П.Желифонову и Г.Б.Тейтельбауму за полезные обсуждения.

Казанский физико-технический институт Академии наук СССР

Посутупила редакцию 28 апреля 1980 г.

Литература

[1] R.J.Baxter. Ph. Tran. R. Soc. Lond., A289, 315, 1978.

[2] R.J.Baxter. Phys. Rev. Lett., 26, 832, 1971 ; Ann. Phys., 70, 193, 1972.

[3] E.H.Lieb. Phys. Rev., 162, 162, 1967; Phys. Rev. Lett., 19, 108, 1967.

[4] Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. УМН, 34, 13, 1979.

[5] C.N.Yang, C.P.Yang. Phys. Rev., 150, 321, 327, 1966.

[6] C.N.Yang. Phys. Rev. Lett., 19, 1312, 1967.

[7] E.H.Lieb, F.Y.Wu. Phys. Rev. Lett., 20, 1445, 1968.