Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.1, стр. 82 – 84. *5 июля 1980 г.*

СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ НЕСКОЛЬКИХ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ

Ф.А.Березин, В.Л. Голо

В рамках суперсимметричного формализма изучается система классических частиц со спином, на которые наложены жесткие связи. Модель является суперсимметричным аналогом классического твердого тела. Получены гамильтонова структура и уравнения Эйлера.

В работе [1] была изучена нерелятивистская динамика частиц со спином посредством введения грассмановых переменных для спиновых степеней свободы. Уравнения движения были выведены из принципа действия с квадратичным лагранжианом. В настоящей статье изучается задача N-частиц со спином, связанных жесткими связями. Положение одной частицы задается супервектором

$$\hat{q}^i_k = q^i_k + \theta^a q^i_{ak} + \theta^1\theta^2 q^i_{12k}, \quad k = 1, \ldots, N$$

характеризующим положение и спинорные степени свободы частицы. Существенно, что θ^a, q^i_{ak} предполагаются нечетными элементами грассмановой алгебры Λ, q^i_k q^i_{12k} – четными элементами. Кроме того предполагается, что θ^a можно включить в систему образующих Λ и что в Λ имеется инволюция, действующая на θ^a согласно формуле $\theta_1^* = -\theta_2$, $\theta_2^* = \theta_1$. Предполагается, что все $\hat{q}_k$ можно получить одним и тем же поворотом в суперпространстве из некоторых фиксированных начальных положений $\hat{q}_{k0}$

$$\hat{q}_k(t) = \hat{R}(t)\, \hat{q}_{0k}, \tag{1}$$

где матрица $\hat{R}(t)$ имеет вид

$$\hat{R}_{ij} = R_{ij} + R^a_{ij}\,\theta^a + R^{12}_{ij}\,\theta^1\theta^2, \tag{2}$$

причем выполнены следующие условия: 1) R^{12}_{ij} являются четными элементами Λ, R^a_{ij} – нечетными элементами Λ, R_{ij}, R^a_{ij}, R^{12}_{ij} не зависят от θ^1, θ^2; 2) $R^+R = 1$, где $R^+_{ij} = R^*_{ij}$. Матрицы $\hat{R}_{ij}$ образуют группу, которую мы обозначим $SO_\Lambda(3)$. Такая конструкция рассматривалась ранее в [3, 5].

Легко видеть, что указанный подход параллелен описанию классического твердого тела – волчка. В контексте спиновых систем он означает, что время релаксации спинов индивидуальных частиц много меньше, чем характерное время всей системы.

Предполагается, что действие для системы N-частиц с жесткими связями имеет вид

$$S = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{N} \dot{\hat{q}}_k \, \dot{\hat{q}}_k^* . \tag{3}$$

Чтобы учесть структуру связей (2) вводится калибровочное поле

$$W = \hat{R}^{-1}(t) \, \dot{\hat{R}}(t)$$

являющееся супер-аналогом угловой скорости. Существенно, что W принадлежит алгебре Ли группы $SO_\Lambda(3)$. Имеет место следующее равенство

$$W = \sum_{1}^{3} W_a f_a , \quad (f_a)_{bc} = -\epsilon_{abc} ,$$

где W_a, $a = 1, 2, 3$ – четные суперполя. С помощью этого равенства уравнение (3) переписывается в виде

$$S = \sum_{a b = 1}^{3} \hat{I}_{ab} W_a W_b ,$$

где $\hat{I}_{ab}$ – супертензор инерции, т.е.

$$\hat{I}^*_{ab} = I_{ba} , \quad \hat{I}_{ab} = I_{ab} + \theta^a I^a_{ab} + \theta^1 \theta^2 I^{12}_{ab} .$$

Уравнения движения системы принимают вид уравнений Эйлера для волчка

$$\dot{M}_a + \epsilon_{abc} W_b M_c = 0. \tag{4}$$

Здесь M_a – супермомент, $M_a = I_{ab} W_b$.

Существенно, что уравнения Эйлера (4) и гамильтонова структура, соответствующая им, ([2, 4]), согласованы с грассмановой структурой. Следуя [2] для получения уравнений Эйлера (4) следует определить скобки Пуассона для компонент супермомента следующим образом

$$\{ M_a \; M_b \} = \epsilon_{abc} M_c . \tag{5}$$

Скобки Пуассона (5) однозначно определяют гамильтонову структуру модели. Полученные уравнения по форме совпадают с обычными уравнениями Эйлера и имеют два интеграла

$$M^2, \; E = I_{ab} W_a M_b .$$

Интегрирование уравнений (4) основано на следующем общем соображении. Пусть имеется дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$, где $f(x)$ — функция вещественного переменного, а x — четный элемент грассмановой алгебры $x = x_0 + \theta_a x^a + \theta_1\theta_2 X$. Решение сводится к решению вещественного уравнения с помощью следующего приема. Решим это уравнение в области вещественных x. Для того, чтобы решить уравнение в грассмановой алгебре нужно взять полученное решение и подставить в качестве начальных данных четные элементы грассмановой алгебры. В рассматриваемом случае решение находится посредством обращения эллиптического интеграла через $\mathrm{sn}(r, k)$. Разложив $\mathrm{sn}(r, k)$ по θ_1, θ_2 получим решение в более подробном виде. Здесь r и k заданы по формулам, [4]

$$r = t\sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}},$$

$$s = \Omega_2 \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - M^2}}.$$

Используя равенство (7) можно вычислить остальные характеристики суперволчка.

Авторы благодарят М.Ольшанецкого, А.Переломова и Н.Воронова за полезную дискуссию.

Московский
государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
29 мая 1980 г.

Литература

[1] F.A.Berezin, M.S.Marinov. Ann. Phys., 104, 336, 1977.

[2] Ф.А.Березин, Функ. анал., том 1, стр. 231, 1967.

[3] А.В.Михайлов, А.М.Переломов. Письма в ЖЭТФ, 29, 445, 1979.

[4] В.И.Арнольд. Математические методы классической механики, М., изд. Наука, 1979.

[5] Ф.А.Березин, Ф.И.Карпелевич. Мат. сб., 77, 201, 1968.