Письма в ЖЭТФ, том 32, вып. 1, стр. 85 – 88 *5 июля 1980 г.*

СУПЕРАЛГЕБРА B(0, 1) И ЯВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СУПЕРСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

А.Н.Лезнов, Д.А.Лейтес, М.В.Савельев

В явном виде проинтегрировано суперсимметричное уравнение Лиувилля с антикоммутирующими спинорными полями и построены его общие решения, определяющиеся четырьмя произвольными функциями. "Потенциалы" калибровочного поля, входящего в представление нулевой кривизны, являются при этом функциями со значениями в суперaлгебре $B(0, 1)$ $(OSp(2,1))$.

1. Методы интегрирования нелинейных динамических систем, связанных с градуированными алгебрами, развитые в предыдущих работах авторов [1], допускают обобщение на суперсимметричный случай. При этом нечетным элементам соответствующих суперaлгебр сопоставляются антикоммутирующие (спинорные) поля, принимающие значения в алгебре Грассмана. В настоящей статье мы подробно остановимся на суперсимметричном обобщении уравнения Лиувилля, связанном с супералгеброй типа $B(0, 1)$ $(0Sp(2, 1))$ чтобы детально проследить отличия, возникающие при интегрировании суперсимметричных уравнений, по сравнению с обычным случаем.

2. Суперсимметричное уравнение Лиувилля, отвечающее действию $\int dz_+ dz_- d\theta_+ d\theta_- [-½\hat{\Phi}\hat{D}_-\hat{D}_+\hat{\Phi} + \exp\hat{\Phi}]$, имеет вид

$$\hat{D}_-\hat{D}_+\hat{\Phi} = \exp\hat{\Phi}, \tag{1}$$

где $\hat{\Phi} \equiv \hat{\Phi}(z_\pm, \theta_\pm) = \rho(z_\pm) - \bar{\theta}\omega(z_\pm) - ½\bar{\theta}\theta F(z_\pm)$ — суперскалярное поле, состоящее из двух скалярных полей ρ, F и майорановского спинора $\omega^\pm$ функций с антикоммутирующими значениями, зависящее от координат $z_\pm$ двумерного пространства и грассмановых переменных $\theta \equiv (\theta_+, \theta_-)$; $\bar{\theta} \equiv (-\theta_-, \theta_+)$. Через $\hat{D}_\pm$ обозначены операторы супердифференцирования, $\hat{D}_\pm = \mp\partial/\partial\theta_\pm + \theta_\pm\partial/\partial z_\pm$; $\hat{D}^2_\pm = \mp\partial/\partial z_\pm$, $\hat{D}_+\hat{D}_- = -\hat{D}_-\hat{D}_+$.

В компонентах суперполя $\hat{\Phi}(F = \exp\rho)$ уравнение (1) имеет вид

$$\rho_{,z_+z_-} = \exp 2\rho + \exp\rho\,\omega^+\omega^-; \quad \omega^\pm_{,z_\mp} = \exp\rho\,\omega^\mp, \tag{2}$$

и в случае $\omega^\pm = 0$ естественно переходит в обчное уравнение Лиувилля, и совпадают с полученными ранее в работе [5].

3. Супералгебра $B(0, 1)$ (см., например, [2]) состоит из пяти элементов h, $X_\pm$, $Y_\pm$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$[h, X_\pm]_- = \pm 2X_\pm, \quad [h, Y_\pm]_- = \pm Y_\pm, \quad [X_+, X_-]_- = [Y_+, Y_-]_+ = h,$$
$$[X_\pm, Y_\pm]_- = 0, \quad [X_\pm, Y_\mp]_- = Y_\pm, \quad [Y_\pm, Y_\pm]_+ = \mp 2X_\pm. \tag{3}$$

Введем следующие операторы $A_\pm$, принимающие значения в алгебре $B(0, 1)$,

$$A_\pm = u^\pm h + \phi^\pm X_\pm + \psi^\pm Y_\pm , \qquad (4)$$

где $u^\pm(z_+, z_-)$ и $\phi^\pm(z_+, z_-)$ — обычные, а $\psi^\pm(z_+, z_-)$ — антикоммутирующие функции, $(\psi^\pm)^2 = \psi^+\psi^- + \psi^-\psi^+ = 0$. Тогда представление "нулевой кривизны" для операторов $A_\pm$ [1)],

$$[\partial/\partial z_+ + A_+ ,\ \partial/\partial z_- + A_-]_- = 0 , \qquad (5)$$

приводит к системе

$$u^-_{,z_+} - u^+_{,z_-} + \phi^+\phi^- + \psi^+\psi^- = 0, \quad \phi^\mp_{,z_\pm} = \pm 2u^\pm\phi^\mp ; \qquad (6)$$

$$\psi^F_{,z_\pm} \mp u^\pm \psi^\mp = \phi^\mp\psi^\pm ;$$

которая после очевидной замены переменных: $\phi^+\phi^- \equiv \exp 2\rho$, $\psi^\pm \equiv \omega^\pm(\phi^\pm)^{1/2}$ сводится к уравнениям (2).

4. Представление (5) суть условие градиентности операторов $A_\pm$, т. е.

$$A_\pm = g^{-1} g_{,z_\pm} , \qquad (7)$$

где g — элемент комплексной оболочки супергруппы G [3] с генераторами (3), представимый в виде разложения Гаусса

$$g = M^+N^- \exp H = M^- N^+ \exp H' , \qquad (8)$$

в котором $M^\pm$ и $N^\pm$ — элементы комплексных оболочек максимальных нильпотентных подгрупп G, натянутых на $X_\pm$, $Y_\pm$, а $H(H')$ принадлежат картановской подалгебре G. В дальнейшем для простоты примем калибровку $H' = 0$, в которой $u^+ = 0$, $\phi^-_{,z_+} = 0$. Из формул (4), (7), (8) следует, что элементы $M^\pm$ представимы в виде $M^\pm = \exp(m^\pm X_\pm + \epsilon^\pm Y_\pm)$, где $m^+(z_+)$, $m^-(z_-)$ и $\epsilon^+(z_+)$, $\epsilon^-(z_-)$ — соответственно обычные и антикоммутирующие функции своих аргументов (ср. с [1]). Тождество $(M^+)^{-1}M^- = N^- \exp H (N^+)^{-1}$, вытекающее из (8), позволяет определить групповые параметры элементов $N^\pm \equiv \exp(\tilde m^\pm X_\pm + \tilde\epsilon^\pm Y_\pm)$ и $\exp H \equiv \exp(r\, h)$ через произвольные функции $m^\pm$ и $\epsilon^\pm$, параметризующие $M^\pm$, именно

$$\exp(-r) = 1 - m^+m^- - \epsilon^+\epsilon^- , \qquad \tilde\epsilon^\pm = (\epsilon^\pm + m^\pm\epsilon^\mp)\exp r ,$$
$$\tilde m^\pm = m^\pm \exp r . \qquad (9)$$

---

1) Матричная реализация представления Лакса для (1), содержащаяся в работе [5], отвечает специальному представлению $B(0, 1)$ в рамках нашего подхода.

Подставляя выражение (8) с известными согласно (9) элементами $M^{\pm}$, $N^{\pm}$ и $\exp H$ в (7) и сравнивая с (4), получаем следующую окончательную формулу для общих решений суперсимметричного уравнения Лиувилля

$$\phi^{\pm} = (m^{\pm}_{,z_{\pm}} \pm \epsilon^{\pm}\epsilon^{\pm}_{,z_{\pm}}) \exp[(1 \pm 1)r], \quad u = -(\epsilon^{+}\epsilon^{-}_{,z_-} + m^{+}m^{-}_{,z_-}) \exp r,$$

$$\psi^{+} = \lambda^{-1}\epsilon^{+}_{,z_+} + \lambda^{-2} m^{+}_{,z_+}(\epsilon^{-} + \epsilon^{+} m^{-}), \quad \lambda \equiv 1 - m^{+}m^{-}, \tag{10}$$

$$\psi^{-} = \epsilon^{-}_{,z_-}(1 - \lambda^{-1}\epsilon^{+}\epsilon^{-}) + \lambda^{-1} m^{-}_{,z_-}(\epsilon^{+} + \epsilon^{-} m^{+}),$$

$$\exp 2\rho = (m^{+}_{,z_+} + \epsilon^{+}\epsilon^{+}_{,z_+})(m^{-}_{,z_-} - \epsilon^{-}\epsilon^{-}_{,z_-}) \exp 2r .$$

5. Использованный выше метод интегрирования суперсимметричного уравнения Лиувилля (1) обобщается естественным образом на произвольные градуированные супералгебры. При этом центр тяжести задачи лежит в построении элементов $N^{\pm}$ и $\exp H$ из (8) по известным $M^{\pm}$, удовлетворяющих, как и в случае "обычных" градуированных алгебр, уравнениям S-матричного типа. Для решения нелинейных уравнений, связанных с градуированными алгебрами, характеризующимися матрицей Картана (вообще говоря, обобщенной) [4], требуется [1] знание элемента $\exp H$ из (8), параметры которого могут быть определены путем вычисления матричных элементов известного оператора $(M^{+})^{-1}M^{-}$ между старшими и младшими векторами базиса. Однако, уже простейший пример суперсимметричного уравнения Лиувилля показывает, что вычисление старшего вектора элемента $(M^{+})^{-1}M^{-}$, равного $1 - m^{+}m^{-} - \epsilon^{+}\epsilon^{-}$, не достаточно для описания полного решения (10) системы (1).

Отметим, что суперсимметричные обобщения уравнений синус-Гордона (см., например, [5]), $\rho_{,z_+z_-} = 2\exp\rho - 2\exp(-\rho)$ и $\rho_{,z_+z_-} = 2\exp\rho - \exp(-2\rho)$, обладающих нетривиальной группой внутренних симметрий в обычном пространстве [6], связаны, по-видимому, с супералгебрами конечного роста со схемами Дынкина  и  и могут быть проинтегрированы аналогично [7]. Все эти вопросы требуют дальнейшего исследования.

В заключение авторы выражают благодарность Б.А.Арбузову, А.А.Кириллову, П.П.Кулишу, Ю.И.Манину, М.А.Мествиришвили и О.А.Хрусталеву за полезные обсуждения.

Институт физики высоких энергий

Поступила в редакцию
31 мая 1980 г.

Литература

[1] A.N.Leznov, M.V.Saveliev. Lett. Math. Phys., 3, 489, 1979; Comm. Math. Phys., ЭЧАЯ – в печати; А.Н.Лезнов. ТМФ, 42, №3, 1980; А.Н.Лезнов, М.В.Савельев, В.Г.Смирнов. Препринт ИФВЭ 80-51, Серпухов, 1980.

[2] V.G.Kac. Adv. Math., 26, 8, 1977; B.Kostant. Lecture Notes in Math., 570, 177, 1977.

[3] Ф.А.Березин. ЯФ, 29, 1670, 1979; Ф.А.Березин, Д.А.Лейтес. ДАН СССР, 22, 505, 1975.

[4] В.Г.Кац. Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1323, 1968; R.V.Moody. Bull. Amer. Soc. US, 73, 217, 1967.

[5] M.Chaichian, P.P.Kulish. Phys. Lett., 78B, 413, 1978; L.Girardello, S.Sciuto. Phys. Lett., 77B, 267, 1978; S.Sciuto. Phys. Lett., 90B, 75, 1980.

[6] А.В.Жибер, А.Б.Шабат. ДАН СССР, 247, 1103, 1979.

[7] А.Н.Лезнов, В.Г.Смирнов. Препринт ИФВЭ 80-06, Серпухов, 1980.