Письма в ЖЭТФ, том 29, вып.10, стр. 622 – 625 20 мая 1979 г.

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

О.И.Богоявленский

Получены автомодельные решения, описывающие процесс расширения вращающегося плазменного шнура. Найдена нестационарная модель крупно-масштабного вихря в воде и модель разлета вращающегося столба газа. Указаны точные автомодельные решения с вращением идеального газа.

1. Известно большое значение автомодельных решений, используемых в качестве моделей различных явлений в газовой динамике [1 – 4]. Однако до настоящего времени автомодельные решения с вращением рассматривались только в задаче о диффузии вихря в вязкой несжимаемой жидкости [3]. Несмотря на наличие большого числа явлений, в которых необходимо учитывать дифференциальное вращение идеального газа,

автомодельное вращение газа, судя по известным монографиям [1 – 5], совершенно не изучалось. Причина этого заключена, по-видимому, в распространенном мнении, что автомодельные движения газа обязаны быть одномерными. В данной работе впервые указаны автомодельные решения с вращением идеального газа, проведено их исследование и найдены некоторые приложения.

Уравнения адиабатического движения идеального газа (с показателем адиабаты $\gamma > 1$) в цилиндрической системе координат r, ϕ, z_1 имеют автомодельные решения следующего вида:

$$v = r t^{-1} V(\lambda), \quad w = r t^{-1} \Omega(\lambda), \quad u = z_1 t^{-1} U(\lambda),$$
$$\rho = a r^{-k-3} t^{-s} R(\lambda), \quad p = a r^{-k-1} t^{-s-2} P(\lambda). \tag{1}$$

Здесь v, wr^{-1}, u – соответственно радиальная, угловая и вертикальная (по оси z_1) скорости газа, ρ – плотность, p – давление, автомодельная переменная $\lambda = r/(b t^{\delta})$, константы a и b имеют размерности $[a] = ML^k T^s$, $[b] = LT^{-\delta}$. Автомодельные движения газа вида (1) являются существенно трехмерными. В частном случае $\Omega = U = 0$ решения вида (1) переходят в подробно изученные [2 – 4] одномерные автомодельные движения газа. Система уравнений газовой динамики для решений вида (1) после замены $\tau = \ln\lambda$, $z = \gamma P/R$ сводится к следующей системе:

$$dV/d\tau = V' = \{z(\kappa - 2V - U) + (V - \delta)(V^2 - V - \Omega^2)\}(z - (V-\delta)^2)^{-1},$$
$$z' = z(-(\gamma-1)V' + 2(1-\gamma V) - (\gamma-1)U)(V-\delta)^{-1},$$
$$u' = u(1-u)(V-\delta)^{-1}, \quad \Omega' = \Omega(1-2V)(V-\delta)^{-1}, \tag{2}$$
$$R' = R(-V' + s + (k+1)V - U)(V-\delta)^{-1}, \quad \kappa = (s + 2 + \delta(k+1))\gamma^{-1}.$$

2. Как известно [5], уравнения магнитной газовой динамики при обычной идеализации (бесконечная проводимость газа и вмороженность вертикально направленного магнитного поля, ортогонального к скорости газа) сводятся к уравнениям адиабатического движения газа с показателем $\gamma = 2$. Поэтому в качестве модели вращающегося плазменного шнура рассмотрим решения системы (2) при $\gamma = 2$, $U = 0$. В этом случае система (2) имеет следующие свойства: 1) существует первый интеграл $\phi_1 = z(V-\delta)\Omega^{-2}$, с помощью которого система (2) сводится к системе двух уравнений на плоскости z, V; 2) имеется линия особых точек:

$$V = 1/2, \quad \Omega = \Omega_o, \quad U = u_o, \quad z = \gamma(\Omega_o^2 + 1/4)\alpha^{-1}, \tag{3}$$

где $u_o = 0$, $\gamma = 2$, $\alpha = 4(\kappa - 1)(1 - 2\delta)^{-1} > 0$, $\Omega_o > 0$ – параметр. Линия (3) при $\beta = (1/2 - \delta)(\kappa - 1) - 1/4 > 0$ разбита поверхностью $L = z - (V-\delta)^2 = 0$ на две части l_o ($L < 0$, $0 < \Omega_o < \beta^{1/2}$) и l_1 ($L > 0$, $\Omega_o > \beta^{1/2}$).

Особые точки на отрезке I_0 являются неустойчивыми (на I_1 – притягивающими). Используя интеграл ϕ_1, можно показать, что из каждой особой точки отрезка I_0 выходит единственная сепаратриса, которая при $r \to \infty$ входит в притягивающую особую точку $Z\,(V = z = \Omega = U = 0)$. В соответствующих решениях при $r \to \infty$ имеем

$$v \sim w \sim r^{(\delta-1)/\delta}, \quad \rho \sim r^{(2-2\delta-\kappa\gamma)/\delta}, \quad p \sim r^{-\kappa\gamma/\delta}. \tag{4}$$

Сепаратрисы $I_0 Z$ при $1/2 < \delta < 1$, $\kappa > 1 - \delta$, $\beta > 0$ определяют всюду регулярные решения, в которых параметры газа p, ρ, v, w стремятся к нулю при $r \to \infty$. Асимптотика этих решений при $r \to 0$ определяется точными решениями, соответствующими особым точкам (3):

$$v = r/2t, \quad w = \Omega_0\, r/t, \quad u = u_0 z_1/t,$$

$$p = C_1 a^{-1}(\Omega_0^2 + 1/4)\, a\, b^{-a-\beta_1} r^{a} t^{-a\delta-\kappa\gamma}, \tag{5}$$

$$\rho = C_1 a\, b^{-a-\beta_1}\, r^{a-2}\, t^{-a\delta-\kappa\gamma+2}, \quad \beta_1 = (\kappa\gamma - s - 2)/\delta.$$

В решениях [5] частицы газа движутся по логарифмическим спиралям $\phi = C_0 \ln r + C_2$, $z_1 = C_3$ и выходят из оси вращения $r = 0$ при $t = 0$. Автомодельные решения, соответствующие сепаратрисам $I_0 Z$, описывают расползание вращающегося плазменного шнура, при котором все параметры движения газа при $t \to \infty$ ($r = \mathrm{const}$) затухают. Эти решения применимы в любой конечной области $0 \leq r < C$, $t > 0$.

3. Уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости в теории мелкой воды эквивалентны уравнениям двумерной газовой динамики для изэнтропических движений с $\gamma = 2$ [1]. Физическими условиями в задаче о крупномасштабном вихре в океане являются: $p \to p_0$, $\rho \to \rho_0$ при $r \to \infty$. Этим условиям удовлетворяют найденные выше решения (сепаратрисы $I_0 Z$) при $\gamma = 2$, $\kappa = 0$, $\delta = 1$ (условие изэнтропичности $\kappa = 2(1 - \delta)$ выполнено). Среди автомодельных решений (1) в теории мелкой воды существуют также решения с движущимися разрывами – "борами".

При $\kappa = 2\delta/\gamma$, $U = 0$ система (2) имеет монотонную функцию, аналогичную известному "интегралу энергии" работы [2]:

$$H = R\left[\frac{zV}{\gamma} + (V - \delta)\left(\frac{V^2 + \Omega^2}{2} + \frac{z}{\gamma(\gamma-1)}\right)\right] = \mathrm{const}\ \lambda^{k-1}.$$

При $\gamma = 2$ интегрирование системы (2) на уровне интегралов $\phi_1 = C_1$ и $H = 0$ сводится к одной простой системе квадратуре.

4. Укажем модель разлета в вакуум вращающегося столба газа, находящегося в полупространстве $z_1 \geq 0$ (в плоскости $z_1 = 0$ вертикаль-

ная скорость газа $u = 0$). Такой столб газа возникает при попадании воздуха в вакуумную установку, а также выбрасывается ракетным двигателем. При показателе адиабаты $\gamma = 3/2$ (что достаточно близко к $\gamma = 1{,}4$ для обычного воздуха) система (2) при $U = 1$ имеет первый интеграл $\phi_2 = z(V - \delta)^{1/2}\Omega^{-3/2}$ и линию особых точек (3) при $u_o = 1$, $a = 3(\kappa - 2)(1 - 2\delta)^{-1} > 0$. Используя интеграл ϕ_2, можно показать, что из каждой особой точки отрезка I_o ($L < 0$) линии (3) выходит двумерная сепаратриса, которая при $r \to \infty$ входит в особую точку Z. Автомодельные решения, соответствующие сепаратрисам $I_o Z$ при значениях параметров $1/2 < \delta < 1$, $2/\gamma < \kappa < 2$, $\Omega_o^2 < \beta$, $\beta = (1/2 - \delta)(\kappa - 2) > 1/4$ являются моделью разлета в вакуум вращающегося столба газа. Эти решения при $r \to 0$ имеют асимптотику (5), $u_o = 1$, а при $r \to \infty$ — асимптотику (4), причем $u \sim z_1 r^{-1/\delta} \to 0$. Полная энергия и масса столба газа единичной высоты в этих решениях конечны.

При произвольном $\gamma > 1$ и $\delta = 1$, $\kappa > 2/\gamma$ существует другая модель разлета вращающегося столба газа, соответствующая устойчивым траекториям системы (2), идущим из особой точки Z_1 ($z = \Omega = 0$, $V = U = 1$) в притягивающую особую точку Z. В этих решениях имеется расширяющаяся от оси вращения пустота. На внутренней границе газа имеем $p = \rho = w = 0$, $v = v_1$, $u = z_1/t$. Область наиболее быстрого вращения газа распространяется по частицам со скоростью $v \approx 2^{1/2} v_1$. При $\delta = 1$, $\kappa = 0$ существуют аналогичные модели разлета вращающегося столба газа в атмосферу, в которых при $r \to \infty$ имеем $p \to p_o$, $\rho \to \rho_o$.

Автор выражает глубокую благодарность С.И.Анисимову и Н.А.Иногамову за полезные обсуждения работы.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 марта 1979 г.

Литература

[1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошной среды. Гостехиздат, 1954.

[2] Л.И.Седов. Методы подобия и размерности в механике. М., изд. Наука, 1977.

[2] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе. Теоретическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1963.

[4] Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидромеханических явлений. М., Физматгиз, 1963.

[5] А.Г.Куликовский, Г.А.Любимов. Магнитная гидродинамика, М,. изд. Наука, 1963.