Письма в ЖЭТФ, том 29, вып. 10, стр. 630 – 633 *20 мая 1979 г.*

СКОБКИ ПУАССОНА И КОНТИНУАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ВИХРЕВОЙ РЕШЕТКИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ HeII

Г.Е.Воловик, В.С.Доценко (мл.)

Найдены скобки Пуассона для макроскопических переменных, описывающих состояния HeII во вращающемся сосуде. С их помощью из функционала энергии общего вида получены уравнения гидродинамики, включающие уравнения теории упругости для решетки вихрей. Найдены колебательные моды, в том числе волны Ткаченко.

При достаточно быстром вращении HeII в нем возникает решетка квантованных вихрей (квант циркуляций $\kappa = 2\pi\hbar/m$, m – масса атома He^4), которая в среднем имитирует твердотельное вращение сверхтекучей компоненты HeII. Феноменологическая теория вихревого движения во вращающемся HeII, в которой каждый элемент объема содержит много вихрей и сверхтекучая скорость $\mathbf{v}^s$ принимается равной среднему значению по полям скоростей отдельных вихрей, построена Бекаревичем и Халатниковым [1]. Эта теория не содержит найденной позднее из микроскопических расчетов дополнительной моды, связанной с колебаниями решетки вихрей [2, 3], которая возникает из-за нарушения трансляционной симметрии при наличии дискретных вихрей. В пределе $\kappa \to 0$, когда решетка вихрей превращается в систему с непрерывно распределенной завихренностью, эта мода переходит в обычные инерционные колебания классической вращающейся жидкости [4], поэтому только в этом предельном случае она получается из теории [1]. Наша задача – зключить степени свободы, связанные с колебаниями решетки, в общую схему крупномасштабной теории вращающегося HeII. Здесь мы ограничимся случаем $T = 0$. Обобщение на ненулевые температуры с учетом диссипации будет опубликовано позднее. Мы воспользуемся методом скобок Пуассона, развитым в [5]. Для получения этим методом макроскопической динамики любой конденсированной среды требуется знать функционал энергии системы, выраженной через гидродинамические переменные, описывающие состояния системы, и скобки Пуассона для этих переменных, которые имеют универсальный характер.

Во вращающемся HeII такими переменными являются плотность массы ρ, скорость $\mathbf{v}^s$ и переменные, описывающие смещение вихрей в решетке. В континуальном описании неравновесное положение вихрей в двумерной решетке можно задать двумя функциями X_1 и X_2 которые постоянны на линии вихря, в отличие от трех функций, задающих положение узла в трехмерном кристалле. Из определения этих функций следует, что $\vec{\nabla} X_\mu$ ($\mu = 1, 2$) перпендикулярен линии вихря, т. е. между компонентами скорости и X_μ имеется связь:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^s \vec{\nabla} X_\mu = 0\,. \qquad (1)$$

Если смещения относительно положения равновесия малы, то

$$X_1(\mathbf{r}) = x - u_x, \qquad X_2(\mathbf{r}) = y - u_y\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – Декартова система координат с осью z вдоль оси вращения, $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}}u_x + \hat{\mathbf{y}}u_y$ малое поперечное смещение вихрей. Гамильтониан вращающегося HeII выражен через эти переменные следующим образом:

$$H = \int d^3r\, \epsilon(\rho, \mathbf{v}^s - [\,\Omega\,,\,\mathbf{r}\,],\quad g_{ik} - g^{\circ}_{ik}), \tag{3}$$

где $\vec{\Omega}$ – угловая скорость вращения сосуда, g_{ik} – метрический тензор:

$$g_{ik} = \sum_{\mu=1,2} \frac{\partial X_\mu}{\partial x_i}\;\frac{\partial X_\mu}{\partial x_k}\;,$$

а g°_{ik} – его значение в равновесии. Разность $g_{ik} - g^{\circ}_{ik}$ представляет собой деформацию решетки вихрей (ср. с обычной теорией упругости [6]).

В случае малых деформаций $g_{ik} - g^{\circ}_{ik} \approx -\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ разложение энергии по смещениям имеет вид:

$$\epsilon = \frac{1}{2}\,\rho\,(\mathbf{v}^s - [\vec{\Omega}, \mathbf{r}\,])^2 + \epsilon_0(\rho) - \frac{1}{2}\,\rho\,[\vec{\Omega}, \mathbf{r}\,]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\rho K_1\left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\,\rho K_2(\vec{\nabla}\mathbf{u})^2 + \frac{1}{2}\,\rho K_3\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right)^2. \tag{4}$$

Модули упругости K_1, K_2 и K_3 имеют порядок величины $\kappa\Omega$ и должны быть найдены из микроскопического анализа.

Скобки Пуассона для переменных $\mathbf{v}^s$ и X_μ можно получить, рассмотрев скобки Пуассона для координат изолированного вихря, которые были найдены в работе [7]. Если ввести переменную X_3 вдоль линии вихря, то для координат N-го вихря $x_i\,(X_3, N)$ эти скобки Пуассона имеют вид

$$\{\,x_i\,(X_3, N),\, x_j(X'_3, N')\,\} = -\frac{1}{\rho\kappa}\, e_{ijk}\frac{\partial x_k}{\partial X_3}\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3}\right|^{-2}\delta_{NN'}\,\delta(X_3 - X'_3) \tag{5}$$

Переход к континуальному пределу означает переход от дискретной переменной N, связанной с вихрем, к непрерывным Лагранжевым переменным X_1 и X_2, жестко связанным с вихревой линией в системе непрерывно распределенных вихрей. При этом символ Кронекера $\delta_{NN'}$ преобразуется с некоторым множителем в $\delta(X_1 - X'_1)\,\delta(X_2 - X'_2)$. Теперь можно перейти от Лагранжева описания в Эйлерову, т. е. от $x_i(X_1, X_2, X_3)$ к $X_\mu(\mathbf{r})$. В результате получаем следующую универсальную (т. е. не зависящую от Гамильтониана) скобку Пуансона:

$$\{X_1(\mathbf{r}), X_2(\mathbf{r}')\} = -\frac{([\vec{\nabla} X_1, \vec{\nabla} X_2]\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^s)}{\rho(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^s)^2}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{6}$$

Аналогичным образом получаем и другие универсальные скобки Пуассона:

$$\{X_\mu(\mathbf{r}), \mathbf{v}^s(\mathbf{r}')\} = \frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla} X_\mu \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{7}$$

$$\{v_i^s(\mathbf{r}), v_k^s(\mathbf{r}')\} = -e_{ikl}\,\frac{(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^s)_l}{\rho}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{8}$$

Кроме того имеется еще одна ненулевая скобка Пуассона, которая следует из того, что ρ/m является плотностью оператора градиентного преобразования, под действием которого $\mathbf{v}^s$ преобразуется по закону $\mathbf{v}^s \to \mathbf{v}^s + \hbar/_m\,\vec{\nabla}\phi$:

$$\{\rho(\mathbf{r}), \mathbf{v}^s(\mathbf{r}')\} = \vec{\nabla}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{9}$$

Можно убедиться, что система (6) – (9) удовлетворяет тождествам Якоби при выполнении условия (1). Из (6) – (9) и Гамильтониана (3) следует полная система уравнений гидродинамики вращающегося HeII. Для вычисления собственных мод вращающегося HeII выпишем эту систему в линеаризованном виде, считая малыми смещения $\mathbf{u}$ и скорость во вращающейся системе координат $\tilde{\mathbf{v}}^s = \mathbf{v}^s - [\vec{\Omega}, \mathbf{r}]$,

$$\dot{\rho} = \{H, \rho\} = -\rho\,\vec{\nabla}\,\tilde{\mathbf{v}}^s, \tag{10}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}^s = \{H, \tilde{\mathbf{v}}^s\} = -2[\vec{\Omega}, \tilde{\mathbf{v}}^s] + K_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{u} + K_3\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,u + {}$$
$$+ K_2\vec{\nabla}_\perp(\vec{\nabla}\mathbf{u}) - \vec{\nabla}\frac{\partial\epsilon_0}{\partial\rho}, \tag{11}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \{H, \mathbf{u}\} = \tilde{\mathbf{v}}^s - \hat{\mathbf{z}}(\hat{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{v}}^s) + \frac{1}{2\Omega}\Bigg[\hat{\mathbf{z}}, K_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{u} + {}$$
$$+ K_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{u} + K_2\nabla_\perp(\vec{\nabla}\mathbf{u})\Bigg]. \tag{12}$$

Решая эти уравнения, находим две моды со спектром

$$\omega^2_{1,2} = \frac{1}{2}(c^2q^2 + 4\Omega^2) \pm \left(\frac{1}{4}(c^2q^2 + 4\Omega^2)^2 - 4\Omega^2c^2q_z^2 - K_1c^2q_\perp^4\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Здесь c — скорость звука $\left(c^2 = \rho\frac{\partial^2\epsilon_0}{\partial\rho^2}\right)$. Выражение (13) справедливо при условии, что длина волны превышает среднее расстояние между вихрями $\sim\sqrt{\kappa/\Omega}$, которое должно быть больше размера кора вихря $\sim\kappa/c$, т. е.

$$q << \sqrt{\frac{\Omega}{\kappa}} << \frac{c}{\kappa}. \tag{14}$$

В силу этих условий члены, содержащие K_2 и K_3 дают лишь малые поправки к спектру, и мы ими пренебрегли. При $K_1 = 0$ (13) дает обычные моды в классической вращающейся жидкости: звуковую волну (при $q >> \Omega/c$ $\omega_1 = cq$) и инерционную моду (при $q >> \Omega/c$ $\omega_2 = 2\Omega|q_z|/q$). Член с K_1 становится существенным только во второй моде при малых q_z. При $q_z = 0$ и $q >> \Omega/c$ получается линейный спектр $\omega_2 = K_1^{1/2}q$ волн Ткаченко — поперечных колебаний решетки.

В заключение обратим внимание, что путем чисто феноменологического подхода (см. [5] и [8]) без исследования динамики изолированного дефекта трудно получить соотношения типа (6) — (8). Так в работе [5] правая часть в (8) отсутствует, в результате уравнения для вихревого движения HeII в [5] применимы в пределе сильного взаимодействия вихрей с нормальной компонентой. В работе [8] вместо X_μ была введена переменная, канонически сопряженная с $\mathbf{v}^s$, однако уравнений, описывающих динамику решетки, получено не было, так как неизвестны скобки Пуассона для компонент введенной переменной.

Авторы благодарны И.Е.Дзялошинскому и С.В.Иорданскому за обсуждение результатов работы.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2 апреля 1979 г.

Литература

[1] И.Бекаревич, И.Халатников. ЖЭТФ, **40**, 920, 1961; И.М.Халатников. Теория сверхтекучести, гл. 7, Москва, 1971.

[2] В.К.Ткаченко. ЖЭТФ, **50**, 1573, 1967.

[3] A.L.Fetter. Phys. Rev., **162**, 143, 1967.

[4] M.R.Williams, A.L.Fetter. Phys. Rev., **B16**, 4846, 1977; Э.Б.Сонин. ЖЭТФ, **70**, 1970, 1976.

[5] I.E.Dzyaloshinskii, G.E.Volovik, направлено в Annals of Phys.

[6] Л.И.Седов. Механика сплошной среды. т. 1, гл. 2, Москва, 1970.

[7] M.Rasetti, T.Regge. Physica, **80A**, 217, 1975.

[8] В.В.Лебедев, И.М.Халатников. Письма в ЖЭТФ, **28**, 89, 1978.