*Письма в ЖЭТФ, том 29, вып. 12, стр. 737 – 740* *20 июня 1979 г.*

# СТОХАСТИЗАЦИЯ ВИХРЕЙ

*Е.А.Новиков, Ю.Б.Седов*

Установлен диапазон конфигурационных температур, в котором отсутствует квазипериодичность для системы четырех линейных вихрей в неограниченном пространстве. Указана возможность стохастизации меньшего числа вихрей при наличии границ или внешнего течения.

1. Для задач динамики плазмы, сверхтекучести, геофизики, а также с точки зрения общей теории динамических систем важно

знать, как ведет себя система линейных вихрей в идеальной жидкости (модель плазмы в магнитном поле). При отсутствии квазипериодичности система не является вполне интегрируемой (к ней нельзя применять метод $L-A$-пары и технику обратной задачи рассеяния) и естественно ожидать стохастизации.

Система трех вихрей в неограниченном пространстве (НП) интегрируется в квадратурах [1, 2]. В предыдущей работе авторов [3] показано, что для системы четырех одинаковых вихрей в НП квазипериодичность отсутствует в области конфигурационной температуры (5) $\Theta \sim 2{,}4$.

2. Декартовы координаты вихрей $z_a(t) = x_a(t) + iy_a(t)$ с интенсивностями $\kappa_a$ удовлетворяют гамильтоновой системе уравнений

$$\kappa_a \frac{dz_a}{dt} = -i\frac{\partial H}{\partial \bar{z}_a}, \qquad \bar{z}_a = x_a - iy_a \tag{1}$$

Для НП при отсутствии внешнего течения

$$H = -\frac{1}{2\pi}\sum_{a<\beta}\kappa_a\kappa_\beta \ln l_{a\beta}, \qquad l_{a\beta} = |z_a - z_\beta|. \tag{2}$$

Из инвариантности (2) относительно сдвигов и поворотов следуют интегралы движения

$$Z = \sum_a \kappa_a z_a, \qquad I = \sum_a \kappa_a z_a \bar{z}_a \tag{3}$$

и их комбинация [1]

$$M = \sum_{a,\beta}\kappa_a\kappa_\beta l^2_{a\beta}. \tag{4}$$

В случае одинаковых вихрей ($\kappa_a \equiv \kappa$) единственным безразмерным определяющим параметром микроканонического распределения, построенного по инвариантам (2) и (4), является конфигурационная температура [1]:

$$\Theta = \prod_{a<\beta}\frac{r^2}{l^2_{a\beta}}, \qquad N(N-1)\,r^2 = \sum_{a,\beta} l^2_{a\beta} \tag{5}$$

($r$ — среднеквадратичное расстояние между $N$ вихрями). Приведем характерные значения $\Theta$ для $N = 4$, отвечающие стационарным конфигурациям. Минимальное значение $\Theta_0 = 2^{10}3^{-6} \approx 1{,}40$ соответствует устойчивому вращению вихрей, расположенных в вершинах квадрата. Неустойчивое вращение с периодом $T$ трех вихрей, находящихся в вершинах равностороннего треугольника, вокруг помещенного в центре четвертого вихря [3] отвечает $\Theta_1 = 2^6 3^{-3} \approx 2{,}37$. Наконец, $\Theta_2 = 4\Theta_1$ соответствует неустойчивому вращению четырех вихрей, расположенных на одной прямой.

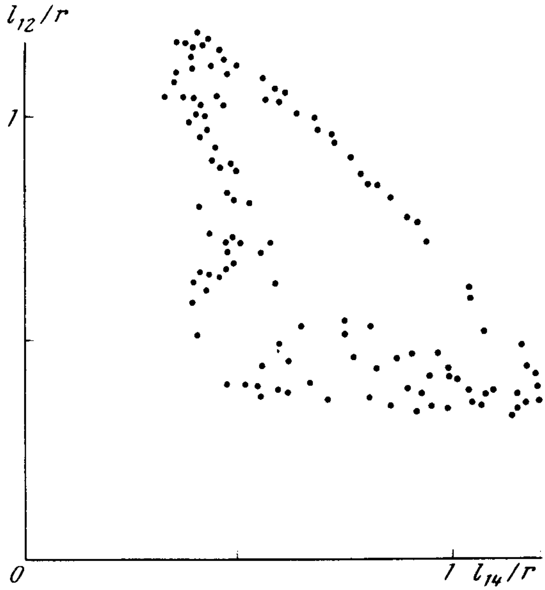


Рис. 1. Проекция Пуанкаре при $\Theta \approx 8{,}71$

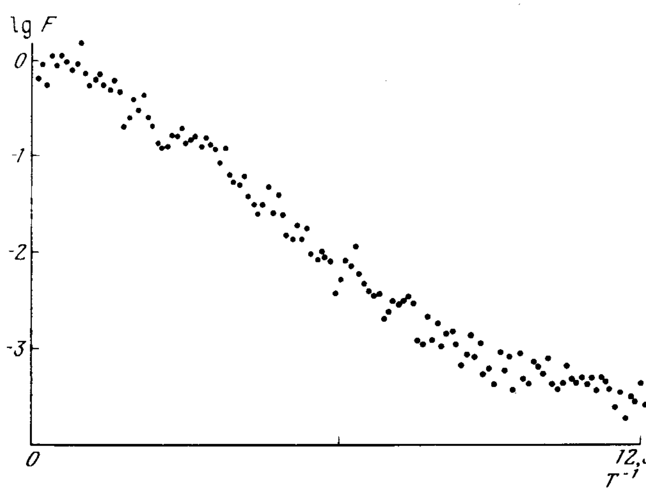


Рис. 2. Спектр $F$ для одного из расстояний между вихрями при $\Theta \approx 8{,}71$

3. Численные эксперименты проводились таким образом, чтобы просмотреть всю допустимую область $\Theta \geqslant \Theta_0$. Фазовые траектории, получаемые интегрированием (1) с начальными данными, отвечающими различным $\Theta$, прослеживались на больших интервалах времени. При этом велось наблюдение за последовательным обходом ячеек разбиения фазового пространства [3], соответствующих различным выпуклым и невыпуклым конфигурациям, находились точки пересечения траекторий с границами ячеек (отображение Пуанкаре), и спектры величин $z_\alpha(t)$, $l_{\alpha\beta}(t)$. Численные эксперименты показали, что при $\Theta > \Theta_2$ вихри образуют кластеры (группы), между которыми не происходит обмена вихрями. Это означает запрещение некоторых переходов между ячейками. Последовательность обхода ячеек получалась периодической, точки на проекции Пуанкаре ложились на кривую. В диапазоне $\Theta_0 < \Theta < \Theta_1$ сначала (при $\Theta < \Theta_* \approx 2{,}17$,

$\Theta_*$ отвечает выходу трех вихрей на прямую) траектории целиком лежат в одной из ячеек (выпуклая конфигурация), затем (при $\Theta > \Theta_*$) траектории могут заходить в четыре соседние ячейки (невыпуклые конфигурации); остальные переходы между ячейками запрещены. Обход ячеек периодичен. В обоих диапазонах $\Theta_o < \Theta < \Theta_1$ и $\Theta > \Theta_2$ движение квазипериодично с двумя частотами и происходит по поверхности двумерного тора. Иная картина наблюдается в интервале $\Theta_1 < \Theta < \Theta_2$. Здесь реализуются все допустимые переходы между выпуклыми и невыпуклыми конфигурациями, обход ячеек непериодичен, а точки на проекции Пуанкаре заполняют двумерную область (рис. 1) — движение в фазовом пространстве трехмерно. Спектры различных фазовых переменных не имеют пиков (рис. 2).

4. Отсутствие квазипериодичности и трехмерность движения для четырех вихрей в НП означает, что система вихрей в общем случае не имеет "скрытых" интегралов движения (не связанных с условиями симметрии). При наличии границ и внешнего течения потеря квазипериодичности и стохастизация могут происходить при меньшем числе вихрей. Достаточно, чтобы число независимых переменных для относительного движения вихрей было не меньше трех. Так, при течении над плоской границей или внутри цилиндрической области для стохастизации, вообще говоря, достаточно трех вихрей. В случае цилиндра это можно проверить экспериментально, используя визуализацию квантованных вихрей в жидком гелии [4]. Если область не обладает ни сдвиговой, ни вращательной симметрией (например, области с полукруговым или прямоугольным сечением), то естественно ожидать потери квазипериодичности уже для двух вихрей. Для стохастизации траекторий жидких частиц в такой области достаточно одного вихря. То же самое относится к НП, если имеется внешнее течение, не обладающее указанными свойствами симметрии.

Институт физики атмосферы
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 марта 1979 г.

## Литература

[1] Е.А.Новиков. ЖЭТФ, 68, 1868, 1975.

[2] Hassan Aref. Preprint, Cornell University, 1978.

[3] Е.А.Новиков, Ю.Б.Седов. ЖЭТФ, 75, 868, 1978.

[4] J.A.Williams, R.E.Packard. Phys. Rev. Lett., 33, 280, 1974.