Письма в ЖЭТФ, том 29, вып. 12, стр. 746 – 750 20 июня 1979 г.

К ТЕОРИИ ДРЕЙФОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С ШИРОМ

А.С.Бакай

Взаимодействие между дрейфовыми и конвективными модами приводит к образованию нелинейных волновых пакетов — связанных состояний волн обоих типов, нечувствительных к стабилизирующему воздействию шира.

В настоящей статье показано, что известный механизм стабилизации неустойчивостей дрейфовых волн широм включается, когда интенсивность дрейфово-конвективной турбулентности достигает критического значения W_c (см. (10)). Спектральная плотность дрейфово-конвективной турбулентности при $W > W_c$ спадает по экспоненциальному закону $n_k \sim \exp(-k^2/k^2)$ в длинноволновой области $k\rho << 1$. Здесь мы ограничимся рассмотрением задачи в пренебрежении тороидальностью. Уравнения движения, описывающие взаимодействие конвективных и дрейфовых мод в магнитном поле с широм можно представить в следующем виде [1, 2].

$$\frac{\partial n^d}{\partial t} - D_B \kappa_0 \nabla_\perp n^d - \rho^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_\perp n^d) - \frac{T_e}{m_i} \nabla_\parallel^2 \int^t n^d(t') dt' +$$

$$+ \delta \hat{L} n^d = - \frac{D_B}{n_0} \left(\frac{\partial n^d}{\partial r} \nabla_\perp n^c - \nabla_\perp n^d \frac{\partial n^c}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_\perp \Delta_\perp \right) \Delta_\perp n^c = D_B \frac{T_e}{T_i \; n_0} \left(\nabla_\perp n^d \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial n^d}{\partial r} \nabla_\perp \right) \Delta_\perp n^d, \quad (2)$$

где n^d, n^c — возмущение плотности плазмы в дрейфовой волне и конвективной моде, $D_B = cT_e/eB$, $\kappa_0 = n_0^{-1} \partial n_0/\partial r$; n_0 — средняя плотность плазмы, $T_{e,i}$ — электронная и ионная температура, m_i — масса ионов, c — скорость света, $D_\perp$ — поперечный коэффициент диффузии, $\rho = c\,(T_e m_i)^{1/2}/eB$,

$$\nabla_\perp = (B_\phi/Br)\partial/\partial\theta - (B_\theta/BR)\partial/\partial\phi,$$

$$\nabla_\parallel = \frac{1}{qR} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + q \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \qquad \Delta_\perp = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_\parallel$$

B_ϕ, B_θ — напряженность тороидального и полоидального поля, q — коэффициент запаса устойчивости, R — большой радиус тора.

Линейный оператор $\delta \hat{L}$, введенный в (1), учитывает слагаемые, приводящие к неустойчивости дрейфовых волн, явный вид которых здесь несуществен. Заметим только, что наиболее неустойчивыми, как правило, оказываются короткие волны, для которых $k\rho \lesssim 1$. Раскачка коротковолновых дрейфовых колебаний, как видно из (2), ведет к возбуждению длинноволновых конвективных мод, которые в свою очередь (см. (1)) влияют на устойчивость дрейфовых волн. Будем искать решение системы уравнений (1), (2) в виде

$$n^d = e^{i(m\theta - n\phi)} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(r) e^{i\nu(l\theta - p\phi)}, \quad (3)$$

$$n^c = b(r) e^{i(l\theta - p\phi)}, \quad (4)$$

где $l << m$, $p << n$, $m/n = q(r_{mn})$, $l/p = q(r_{lp})$, r_{mn}, r_{lp} — радиусы резонансных поверхностей, в окрестностях которых локализованы колебания. Простоты ради пока рассматривается случай, когда конвективная мода содержит только одну гармонику.

Подставляя (3), (4) в (1), получим

$$\left\{\rho^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{c_s q'}{\omega q^2 R}\right)^2[(m+\nu l)x-\nu l d]^2\right\}a_\nu -$$

$$-\frac{D_B}{\omega n_0}\left[k_y\left(\frac{\partial b}{\partial x}a_{\nu-1}+\frac{\partial b^*}{\partial x}a_{\nu+1}\right)+\kappa_y\left(b\frac{\partial a_{\nu-1}}{\partial x}-b^*\frac{\partial a_{\nu+1}}{\partial x}\right)\right]=$$

$$=\left[1-\frac{D_B k_y\kappa_0}{\omega}+\rho^2(k_y+\nu\kappa_y)^2+\frac{\delta L(\omega,k)}{\omega}\right]a_\nu\equiv\Lambda a_\nu, \qquad (5)$$

где $x=r-r_{mn}$, $d=r_{lp}-r_{mn}$, $k_y=m/r_{mn}$, $\kappa_y=l/r_{lp}$, $\delta L(\omega,k)$ – образ оператора δL в пространстве (ω, k).

Покажем, что конвективные волны ослабляют, а при достаточно больших амплитудах (10) снимают стабилизирующее влияние шира на дрейфовые волны. Для этого в духе [3] заменим в (5) разностные уравнения дифференциальными и будем искать решение в виде

$$a_\nu(x)=\exp[i\nu(\pi+\beta)]\,a(\xi),$$

где $\beta=\arg b$, $\xi=k_y x-\nu\kappa_y d$. В результате для $a(\xi)$ с точностью до слагаемых порядка l/m получим уравнение:

$$\left(\mu\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+a^2\xi^2\right)a(\xi)=\left(\Lambda+\frac{2D_B k_y}{\omega n_0}\frac{\partial|b|}{\partial x}\right)a(\xi)\equiv\lambda a(\xi), \qquad (6)$$

$$\mu=\rho^2k_y^2-\frac{D_B k_y\kappa_y^2 d}{\omega n_0}\left(2|b|-d\frac{\partial|b|}{\partial x}\right), \qquad (7)$$

$$a=c_s r_{mn}q'/\omega q^2R=c_s\theta/r_{mn}\omega.$$

(θ – шир).

Нас интересуют исчезающие при $|\xi|\to\infty$ собственные функции уравнения (6). Нетрудно убедиться, что наиболее неустойчивым является решение с наименьшим по модулю собственным значением

$$\lambda=(-\mu a^2)^{1/2}.$$

Это решение имеет вид

$$a(\xi)=A\exp(-a\xi^2/\sqrt{\mu}). \qquad (9)$$

Поскольку $|b|'d\approx|b|$, то при малых $|b|$, как видно из (7), $\mu>0$, правая часть (8) является чисто мнимой и определяет величину затухания дрейфовых волн за счет шира. Подавляющее влияние шира исчезает при $\mu < 0$, т. е. при

$$|b| > b_c \approx \frac{\rho^2 k_y \omega}{D_B \kappa_y^2 d} n_0 \approx \frac{\rho^2 k_y^2 \kappa_0}{\kappa_y^2 d} n_0, \tag{10}$$

когда правая часть (3) становится вещественной.

Можно показать, что полученный критерий справедлив при учете вклада электронов в дисперсию дрейфовых волн, приводящего к подавлению дрейфовых неустойчивостей [4]. При этом несколько изменится вид собственных функций (9) и закон дисперсии (8).

Дрейфовые волны в свою очередь возбуждают конвективные моды, как видно из (2), так что в результате возникают нечувствительные к влиянию шира нелинейные дрейфово-конвективные колебания. Амплитуда конвективной волны находится из (2):

$$|b| = \frac{2D_B k_y \kappa_y}{D_\perp (k_x^2 + \kappa_y^2)^2} \frac{T_e}{T_i n_0} \left| \sum_\nu [(k_y - \kappa_y) a_{\nu-1}^* a_\nu' + k_y (a_{\nu-1}^*)' a_\nu] \right|$$

$$\kappa_x = b^{-1} \partial b / \partial x. \tag{11}$$

Подставляя (9) в (11), получим

$$|b| = \frac{4\sqrt{\pi} D_B k_y^2 \kappa_y^2}{D_\perp (\kappa_x^2 + \kappa_y^2)^2} \frac{T_e}{T_i} \left| \frac{a^2}{\mu} \right|^{1/4} \frac{A^2}{n_0}. \tag{12}$$

Наряду с конвективной модой (l, p) дрейфовые волны (3) возбуждают также все гармоники $(\nu l, \nu p)$, амплитуды которых экспоненциально убывают с ростом ν. Поэтому следует ожидать, что спектр дрейфово-конвективной турбулентности при малых $k(k\rho << 1)$ имеет экспоненциальную форму: $n_k \sim \exp(-k^2/\bar{k}^2)$, $\bar{k}^2 = \sqrt{\mu}/ad^2$.

Полученное выражение для спектральной плотности согласуется с экспоненциальной зависимостью, полученной в [5] при высоком уровне турбулентности. Характерно, что в этих экспериментах каждому выделенному значению ω соответствовал широкий спектр по k, что свидетельствует о наличии связанных дрейфово-конвективных волн.

Нетрудно найти также амплитуду насыщения дрейфовой турбулентности из уравнения баланса энергии:

$$\gamma_L = \gamma_s + D_\perp \kappa_y^2 (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) |b|^2 / k_y^2 A^2,$$

$$\gamma_L = \mathrm{Im}(\delta L), \qquad \gamma_s = \mathrm{Im}[\omega(-\mu a^2)^{1/2}].$$

Заметим, что дрейфово-конвективная турбулентность приводит к аномальному переносу. Коэффициенты переноса можно оценить, воспользовавшись полученными оценками уровня турбулентности и результатами работ [6 – 8].

Автор благодарен Б.Б.Кадомцеву за многочисленные плодотворные обсуждения рассмотренного здесь вопроса.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
24 апреля 1979 г.

Литература

[1] Р.З.Сагдеев, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. Физика плазмы, 4, вып.3, 1978.

[2] C.Z.Cheng, H.Okuda. Nucl. Fusion, 18, 587, 1978.

[3] J.B.Taylor. Plasma Phys. and Contr. Fusion. Res., II, 323. IAEA, Vienna, 1977.

[4] Liu Chen, P.N.Guzdar, R.B.White, P.K.Kaw, C.Oberman. Phys. Rev. Lett., 41, 649, 1978.

[5] A.Gondhalekar et all. IAEA, Innsbruck, 1978, CN-37-C-4.

[6] А.А.Галеев. Кн. Проблемы теории плазмы. "Наукова думка", 1973, Int. Symp. on Toroidal Plasma Conf., Garching, E1-1, 1973.

[7] H.Furth, M.N.Rosenbluth. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. 1, 821, Vienna, 1969.

[8] A.S.Bakai. IAEA, Innsbruck, 1978, CN-37-X-4-2.