Письма в ЖЭТФ, том 30, вып. 7, стр. 443 – 448 *5 октября 1979 г.*

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДВУМЕРНОГО ОБОБЩЕНИЯ ЦЕПОЧКИ ТОДА

А.В.Михайлов

Показано, что двумерное обобщение цепочки Тода $\phi^k_{tt} - \phi^k_{xx} - 2\exp(2\phi^{k+1} - 2\phi^k) + 2\exp(2\phi^k - 2\phi^{k-1}) = 0$ и, в частности, уравнение $\phi_{tt} - \phi_{xx} + 2\exp(4\phi) - 2\exp(-2\phi) = 0$ являются интегрируемыми методом обратной задачи. Редукцию к этим уравнениям задает группа, которая во втором случае некоммутативна.

1. Хорошо известно, что цепочка Тода:

$$\phi^k_{tt} = 2\exp(2\phi^{k+1} - 2\phi^k) - 2\exp(2\phi^k - 2\phi^{k-1}) \tag{1}$$

может быть проинтегрирована методом обратной задачи [1]. В настоящей работе мы покажем, что двумерное обобщение этой модели

$$\phi^k_{tt} - \phi^k_{xx} = 2\exp(2\phi^{k+1} - 2\phi^k) - 2\exp(2\phi^k - 2\phi^{k-1}) \tag{2}$$

и в частном случае уравнение

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + 2\exp(4\phi) - 2\exp(-2\phi) = 0 \tag{3}$$

также являются интегрируемыми. Отметим, что ряд замечательных свойств уравнения (3) был известен ранее: факт существования богатого набора интегралов движения был установлен в [3], в [2] было доказано существование бесконечного набора потоков, коммутирующих с (3). Деформируем условие совместности для системы (1) (см. [1]) следующим образом

$$\begin{aligned} X\Psi &= (\partial_x + V + iC_1 - iC_2)\,\Psi = 0, \\ T\Psi &= (\partial_t + W + iC_1 + iC_2)\,\Psi = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} V_{ij} = \partial_t\phi_i\,\delta_{ij}; \quad W_{ij} = \partial_x\phi_i\delta_{ij}; \quad C_{1ij} = C_{2ji} = C_j\delta_{i-1,j}, \\ C_i = \exp(\phi^{i+1} - \phi^i). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь δ_{ij} — кронекеровский символ, который в случае замкнутой цепочки из N элементов определяется следующим образом:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i \equiv j \mod (N) \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Спектральный параметр λ можно ввести в условия совместности (4), потребовав их ковариантность при преобразованиях Лоренца (см. [4])

$$\begin{aligned} X &= \partial_x + V + i\lambda C_1 - i\lambda^{-1}C_2, \\ T &= \partial_t + W + i\lambda C_1 + i\lambda^{-1}C_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Условие коммутативности операторов X и T при всех значениях параметра λ эквивалентно уравнению (2), это позволяет интегрировать его методом обратной задачи.

2. Система уравнений (2) отвечает минимому действия

$$S = \int dx dt \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{2}\,\phi^k_\mu\phi^{k\mu} - \exp(2\phi^k - 2\phi^{k-1}) + 1\right]. \tag{7}$$

Спектр масс возбуждений вблизи нуля имеет вид:

$$m_n^2 = 4\sin^2(\pi n/N), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad N - 1.$$

Нулевую моду можно исключить зафиксировав $\Sigma\phi^k = 0$. При этом, в случае $N = 2$, система (2) сведется к уравнению

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + 4\,\mathrm{sh}(2\phi) = 0,$$

в случае $N = 3$

$$\phi^1_{tt} - \phi^1_{xx} + 2\exp(2\phi^1 - 2\phi^2) - 2\exp(-4\phi^1 - 2\phi^2) = 0,$$
$$\phi^2_{tt} - \phi^2_{xx} + 2\exp(4\phi^1 + 2\phi^2) - 2\exp(2\phi^1 - 2\phi^2) = 0. \qquad (8)$$

Система уравнений (8) допускает дополнительную редукцию ($\phi^1 = -\phi^2 = \phi$), при этом эба уравнения совпадают и имеют вид (3).

Систему (2) можно рассматривать как разностную аппроксимацию уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + h^2 u_{yyyy} + h(u_y)^2_y = 0, \qquad (9)$$

которое обобщает уравнение Кадомцева — Петвиашвили — оно описывает нелинейные волны в слабодиспергирующей среде (h — дисперсионная длина), но уже движущиеся в обоих направлениях по y.

3. Для вычисления законов сохранения следует (см. [5]) произвести калибровочное преобразование в задаче совместности (4), (5), и перейти к полюсной калибровке. Произведем калибровочное преобразование диагонализующее матрицу C_1

$$X' = U^{-1} X U, \qquad T' = U^{-1} T U,$$
$$U_{\alpha\beta} = N^{-1/2}\exp(\phi^{\alpha-1})\, q^{-(\alpha-1)(\beta-1)}, \qquad q = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right). \qquad (10)$$

При этом пара операторов X', T' будет иметь вид

$$X'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\partial_x + \partial_x\hat{\phi}_{\alpha-\beta} + \partial_t\hat{\phi}_{\alpha-\beta} - i\lambda^{-1}q^{1-\alpha}\hat{C}^2_{\alpha-\beta} + i\lambda q^{\alpha-1}\delta_{\alpha\beta}, \qquad (11)$$

$$T'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\partial_t + \partial_t\hat{\phi}_{\alpha-\beta} + \partial_x\hat{\phi}_{\alpha-\beta} + i\lambda^{-1}q^{1-\alpha}\hat{C}^2_{\alpha-\beta} + i\lambda q^{\alpha-1}\delta_{\alpha\beta}, \qquad (12)$$

где шляпка обозначает конечное преобразование Фурье:

$$\hat{\phi}_\alpha = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} q^{n\alpha}\phi^n, \qquad \hat{C}^2_\alpha = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} q^{n\alpha} C^2_n. \qquad (13)$$

Диагональные элементы $a_{ii}(\lambda)$ матрицы рассеяния оператора X не зависят от t. Производя асимптотическое разложение элемента a_{11}

по обратным степеням λ при $\lambda \to \infty$, получим серию I_n законов сохранения

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n dx, \tag{14}$$

где f_n определяется из реккурентных соотношений:

$$- i\partial_x A_\alpha^n - A_\alpha^{n+1} + A_\alpha^{n-1} + \sum_{k+m=n} f_m A_\alpha^k + (\partial_x \hat{\phi}_{\alpha-\beta} + \partial_t \hat{\phi}_{\alpha-\beta}) A_\beta^n -$$

$$- q^{1-\alpha} \hat{C}_{\alpha-\beta}^2 A_\beta^{n-1} + q^{\alpha-1} A_\alpha^{n+1} = 0, \tag{15}$$

$$A_\alpha^h = \delta_{n,0}\, \delta_{\alpha,1} \quad \text{при } n \leq 0. \tag{16}$$

Вторая серия интегралов I_{-n}, возникающая при разложении в нуле ($\lambda \to 0$), может быть получена аналогичным образом. Реккурентные соотношения для этой серии будут иметь вид (15), (16), где $\partial_t \hat{\phi}_{\alpha-\beta} + \partial_x \hat{\phi}_{\alpha-\beta}$ следует заменить на $q^{\beta-\alpha}(\partial_t \hat{\phi}_{\alpha-\beta} - \partial_x \hat{\phi}_{\alpha-\beta})$.

Обычно диагональные элементы матрицы рассеяния являются независимыми и разложение каждого из них порождает серию законов сохранения. Матричные элементы a_{ii}, вычисленные для оператора X', связаны простым соотношением:

$$a_{i+1,\, i+1}(\lambda) = a_{ii}(q\lambda), \tag{17}$$

и поэтому интегралы, порожденные ими, совпадают с уже вычисленными.

4. Операторы X и T имеют весьма специальный вид — в каждой из матриц V, W, $C_{1,2}$ лишь N элементов отличны от нуля. В случае же общего эти матрицы произвольны и имеют N^2 комплексных элементов. Если в случае общего положения начальные данные для задачи Коши взять в виде (5), то в процессе эволюции этот вид будет сохраняться. Иными словами, система (2) представляет собой ограничение системы общего положения на подмногообразие многообразия всех матриц, инвариантное относительно потока (в данном случае на подмногообразие матриц вида (5)). Такое ограничение называется редукцией в системе общего положения.

Каждая редукция накладывает определенные ограничения на множество собственных функций $\{\Psi(\lambda)\}$ пары коммутирующих операторов X, T. Эти ограничения необходимо учитывать при построении уравнений обратной задачи. Из вида операторов X, T (6) следуют соотношения:

$$Q^* X(\lambda)\, Q = X(q\lambda), \quad Q^* T(\lambda)\, Q = T(q\lambda), \tag{18}$$

где $Q_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\, q^{\alpha-1}$, и, следовательно,

$$Q\, \Psi(q^* \lambda) = \widetilde{\Psi}(\lambda), \quad \widetilde{\Psi}(\lambda) \in \{\Psi(\lambda)\}. \tag{19}$$

Отсюда, в частности, вытекает свойство (17) для матрицы рассеяния. Требование вещественности матриц $C_{1,2}V$, W приводит к

$$X^*(-\lambda^*) = X(\lambda), \quad T^*(-\lambda^*) = T(\lambda) \tag{20}$$

и, следовательно,

$$\Psi^*(-\lambda^*) = \widetilde{\Psi}(\lambda), \quad \widetilde{\Psi}(\lambda) \in \{\Psi(\lambda)\}. \tag{21}$$

Преобразования (19), (21) множества $\{\Psi\}$ образуют группу $G_1 \approx \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_2$ ответственную за редукцию. Заметим, что G_1 действует и на комплексной плоскости спектрального параметра ($\lambda \to q\lambda$, $\lambda \to -\lambda^*$), при этом из (19), (20) следует, что множество спектральных особенностей операторов X, T инвариантно относительно действия G_1.

Уравнение (3) является результатом дополнительной редукции и эквивалентно условию коммутативности пары операторов

$$\partial_x + \begin{bmatrix} \phi_t & -i\lambda^{-1}e^{-\phi} & i\lambda e^{2\phi} \\ i\lambda e^{-\phi} & 0 & -i\lambda^{-1}e^{-\phi} \\ -i\lambda^{-1}e^{2\phi} & i\lambda e^{-\phi} & -\phi_t \end{bmatrix},$$

$$\partial_t + \begin{bmatrix} \phi_x & i\lambda^{-1}e^{-\phi} & i\lambda e^{2\phi} \\ i\lambda e^{-\phi} & 0 & i\lambda^{-1}e^{-\phi} \\ i\lambda^{-1}e^{2\phi} & i\lambda e^{-\phi} & -\phi_x \end{bmatrix}.$$

Дополнительная редукция влечет появление дополнительной образующей p в группе редукций:

$$\Psi(\lambda) \xrightarrow{p} K(\Psi^+(\lambda^*))^{-1} = \widetilde{\Psi}(\lambda); \quad \widetilde{\Psi}(\lambda) \in \{\Psi(\lambda)\}, \quad K_{ij} = \delta_{i,-j},$$

(очевидно, что $p^2 = 1$) и расширяет G_1 до группы $G \approx S_3 \times \mathbb{Z}_2$ (S_3 — группа перестановок трех элементов).

Таким образом уравнение (2) представляет собой пример редукции системы общего положения порожденный группой G_1 (а не набором инволюций), уравнение (3) является примером редукции, порожденной некоммутативной группой. Система уравнений (2) при нечетном N имеет редукцию обобщающую уравнение (3), причем группа редукций G изоморфна $\widetilde{G} \times \mathbb{Z}_2$, где $\widetilde{G}$ — группа с двумя образующими p, q удовлетворяющих тождествам $p^2 = 1$, $q^N = 1$, $pqpq = 1$.

Представляется весьма вероятным, что классификация редукций в интегрируемых системах связана с классификацией допустимых групп редукций, нетривиальные примеры которых мы привели в этом пункте.

В заключение отметим, что двумерное обобщение допускает цепочка уравнений $\partial_t N_k = N_k(N_{k+1}^2 - N_{k-1}^2)$ (см. [1]):

$$\partial_t N_k + \partial_x W_k = N_k(N_{k+1}^2 - N_{k-1}^2),$$

$$\partial_x(N_k N_{k-1}) = N_k W_{k-1} - W_k N_{k-1}.$$

Эта система в непрерывном пределе переходит в уравнение Кадомцева – Петвиашвили $(u_t + u_{xxx} + uu_x)_x = u_{yy}$.

Построение уравнений обратной задачи и их анализ будет опубликован в другом месте.

Мне приятно поблагодарить В.Е.Захарова, С.В.Манакова и С.П.Новикова за полезное обсуждение этой работы.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
31 мая 1979 г.

Литература

[1] С.В.Манаков. ЖЭТФ, 67, 543, 1974.

[2] А.Б.Шабат. Доклад на конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными, посвященной памяти И.Г.Петровского. М., 1979 г; А.В.Жибер, А.Б. Шабат. ДАН СССР, 247, №5, 1979.

[3] R.K.Dodd, R.K.Bullough. Proc. Roy. Soc. Lond. A. 352, 481, 1977.

[4] А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, 23, 356, 1976.

[5] А.В.Михайлов. Кандидатская диссертация, Черноголовка 1978.