Письма в ЖЭТФ, том 30, вып. 7, стр. 452 – 456   *5 октября 1979 г.*

ТЕОРИЯ ЯНГА – МИЛЛСА В СИГМА-МОДЕЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Е.А.Иванов

Интерпретация теории Янга – Миллса как теории спонтанного нарушения приводит к ее новому представлению на языке билокальной нелинейной σ-модели. Обсуждаются возникающие возможности.

1. Последнее время высказываются соображения, что в подходящих переменных теория Янга – Миллса может оказаться вполне интегрируемой [1 – 3]. Поиск удобных нестандартных переменных для этой теории важен также в связи с проблемой адекватного описания ее симметричной фазы, ответственной за конфайнмент [4, 5].

В этом плане представляется конструктивной предлагаемая в настоящей работе новая формулировка калибровочных теорий, демонстрирующая их глубокое единство с нелинейными σ-моделями. Она основана на установленном ранее Огиевецким и автором [6] факте, что любая калибровочная теория есть результат нелинейной реализации определенной бесконечно-параметрической группы $K = G \subset \times \mathcal{P}$ с подгруппой стабильности вакуума $G_0 \times \mathcal{P}$, где G_0 – подгруппа глобальной симметрии, $\mathcal{P}$ – группа Пуанкаре (см. также [7]).

2. Вводя дополнительную координату – лоренцев 4-вектор y_μ, представим генераторы группы $K = G \subset \times \mathcal{P}$ в виде:

$$P_\mu = i\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \quad L_{\mu\nu} = i(y_\mu \partial^y_\nu - y_\nu \partial^y_\mu), \quad Q^i_\mu = y_\mu Q^i, \dots Q^i_{\mu_1 \dots \mu_n} =$$

$$= y_{\mu_1} \dots y_{\mu_n} Q^i, \dots \quad . \qquad (1)$$

Здесь P_μ, $L_{\mu\nu}$ – генераторы группы $\mathcal{P}$, Q^i – генераторы группы G_0, порождающие вместе с $Q^i_\mu, \dots Q^i_{\mu_1 \dots \mu_n}, \dots$ алгебру бесконечно-параметрической группы G (см. [6]).

Представление (1) позволяет свернуть бесконечный набор голдстонионов $b^i_\mu(x)$, $b^i_{\mu_1\mu_2}(x), \dots b^i_{\mu_1 \dots \mu_n}(x), \dots$ (параметров фактор-пространства $K/G_0 \times L$) в одно билокальное поле $b(x, y) \equiv b^k(x, y) Q^k = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} b_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n}$. При действии группы G, реализованной на смежных классах $K/G_0 \times L$ левыми сдвигами [6] $b(x, y)$ преобразуется по закону:

$$\exp\{ib'(x, y)\} = \exp\{i\lambda(x + y)\}\exp\{ib(x, y)\}\exp\{-i\lambda(x)\}, \qquad (2)$$

где $\lambda(y) = \lambda^i(0) Q^i + \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \lambda^i_{\mu_1 \dots \mu_n}(0) y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n} Q^i$ – производящая функция для константных параметров группы G. Ковариантные производные голдстонионов сворачиваются в билокальную форму Картана

$$\omega_\mu(x, y) = -b_\mu(x) + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \nabla_\mu b_{\rho_1 \dots \rho_n}(x) y^{\rho_1} \dots y^{\rho_n} \qquad (3)$$

определяемую соотношением:

$$\exp\{-ib(x, y)\}(\partial^x_\mu - \partial^y_\mu) \exp\{ib(x, y)\} = i\omega_\mu(x, y) \qquad (4)$$

и поэтому удовлетворяющую обобщенному уравнению Маурера – Картана:

$$(\partial^x_\mu - \partial^y_\mu)\,\omega_\rho(x, y) - (\partial^x_\rho - \partial^y_\rho)\,\omega_\mu(x, y) + i[\omega_\mu(x, y), \omega_\rho(x, y)] = 0 \, . \qquad (5)$$

При преобразованиях (2) форма $\omega_\mu(x, y)$ преобразуется как поле Янга – Миллса $b_\mu(x)$.

Бесконечный набор ковариантных дифференциальных условий обратного эффекта Хиггса [8, 6], выражающих голдстонионы $b^i_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$ с $n \geqslant 2$ через $b_\mu(x)$ и его производные, представляется теперь одним уравнением

$$\gamma^{\mu}[\omega_{\mu}(x, y) + b_{\mu}(x)] = 0 \tag{6}$$

или, с учетом (4):

$$\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}^{x} - \partial_{\mu}^{y}) \exp\{-ib(x, y)\} = i\gamma^{\mu}b_{\mu}(x)\exp\{-ib(x, y)\}. \tag{7}$$

Его решением является контурный функционал от поля $b_{\mu}(x)$ вдоль прямолинейного пути от точки $x + y$ к точке x:

$$\exp\{-i\bar{b}(x, y)\} = T\exp\{i\int_{x+y}^{x} b_{\mu}(\xi)d\xi^{\mu}\} = T\exp\{-i\int_{0}^{1}y^{\mu}b_{\mu}[x + (1-\beta)y]d\beta\}, \tag{8}$$

где T означает упорядочение по матрицам Q^{i} на интервале $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Записанная в терминах минимального голдстониона $\bar{b}(x, y)$ форма Картана (3) принимает вид

$$\bar{\omega}_{\mu}(x, y) = -b_{\mu}(x) + \frac{1}{2}G_{\mu\rho}(x)y^{\rho} + \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n+1)!}\nabla_{\rho_1}\ldots$$

$$\ldots\nabla_{\rho_{n-1}}G_{\mu\rho_n}y^{\rho_1}\ldots y^{\rho_n}, \tag{9}$$

где $G_{\mu\rho} = \partial_{\mu}b_{\rho} - \partial_{\rho}b_{\mu} - i[b_{\mu}, b_{\rho}]$ — стандартный янг-миллсовский ротор, ∇_{ρ} — ковариантная производная для присоединенного представления группы G_{o}.

Таким образом, интенсивно обсуждаемый в литературе [1, 2, 9 –11] "струнный" функционал калибровочных полей естественно возникает в нашем подходе как наиболее экономное представление для смежных классов G/G_{o}. Подчеркнем, что в отличие от стандартного подхода коварианты у нас определяются не через варьирование отдельных участков пути, а через дифференцирование его конечных точек, отвечающее инфинитезимальному повороту всего пути как целого вокруг точки $x + y$ (формула (4)).

Обратный эффект Хиггса в его обычной формулировке выбирает прямолинейный путь во множестве путей между точками $x + y$, x. Однако без противоречия с трансформационным законом (2) в качестве представителя смежных классов G/G_{o} можно взять функционал по любому кривому пути (такому, чтобы в $b(x, y)$ было разложимо в ряд по y_{μ}). Это соответствует приравниванию симметричных частей ковариантных производных голдстонионов, начиная с $\nabla_{\mu}b_{\rho_1\rho_2}(x)$, не нулю, как в (6), а тем или иным комбинациям ковариантных производных от ротора $G_{\rho\mu}(x)$. Любой такой элемент всегда можно представить в виде:

$$\exp\{i\tilde{b}(x, y)\} = \exp\{i\bar{b}(x, y)\}\exp\{i\,\overset{\approx}{b}(x, y)\}, \quad (\overset{\approx}{b}'(x, y) = e^{-i\lambda(x)}\overset{\approx}{b}(x, y)e^{i\lambda(x)}), \tag{10}$$

где неминимальный множитель $\exp\{i\overset{\approx}{b}(x, y)\}$ описывает отклонение от прямолинейного пути и выражается через степени ковариантных производных от $G_{\rho\mu}(x)$.

3. Основное соотношение (4) имеет вид, характерный для разложений , определяющих ковариантные производные в нелинейных σ-моделях для главных киральных полей. Поэтому теорию Янга – Миллса можно интерпретировать как сектор нелинейной σ-модели для билокального главного кирального поля $b(x, y)$ на группе G_0, выделяемый условиями (5), (6), причем по определению $b_\mu(x) = \partial^y_\mu b(x, y)|_{y=0}$, $b(x, 0) = 0$. Интересно выяснить, можно ли представить уравнения Янга – Миллса как некоторое дифференциальное ковариантное условие на форму $\omega_\mu(x,y)$ дополнительное по отношению к "кинематическим" условиям (5), (6). С точки зрения гипотезы о полной интегрируемости теории Янга – Миллса желательно, чтобы это условие имело первый порядок по производным.

В абелевом случае уравнения движения для поля $b_\mu(x)$ (без источников) эквивалентны условию "сохранения" формы $\bar{\omega}_\mu(x, y)$ по y:

$$\partial^y_\mu \bar{\omega}^\mu(x, y) = 0. \qquad (11)$$

В неабелевом случае такая эквивалентность имеет место с точностью до третьего порядка по y и ее нельзя восстановить в более высоких порядках без привлечения членов с высшими производными[1]. Подчеркнем, что для автодуальных полей $(G_{\mu\rho} = \pm \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\lambda\nu}G^{\lambda\nu})$ и светоподобных отрезков $y^2 = 0$ в (8) условие (11) удовлетворяется в каждом порядке по y. Пока не ясно, следует ли из (11) при $y^2 = 0$ автодуальность $b_\mu(x)$.

Интересно отметить, что и в общем случае форму $\omega_\mu(x, y)$ можно сделать поперечной по y на решениях уравнений Янга – Миллса, если отказаться от условия прямолинейности (6) и задать классы G/G_0 функционалами типа (10), отвечающими кривым путям. Условие (11) сводится тогда к уравнению на функционал $\tilde{b}(x, y)$, которое разрешимо в каждом порядке по y. Заманчиво предположить, что существует соответствие между классами решений уравнений Янга – Миллса и формой пути интегрирования в (10).

4. Мы показали, что теория Янга – Миллса в ее стандартной, несимметричной фазе допускает естественное вложение в билокальную нелинейную σ-модель на группе G_0. Это дает основания предположить, что симметричная фаза теории, связанная с калибровочно-инвариантным вакуумом, должна описываться в рамках соответствующей билокальной линейной σ-модели. В простейшем случае $G_0 = SU(2)$ минимальный способ линеаризовать основной трансформационный закон (2) состоит в рассмотрении билокальной матрицы $U(x,y) = U^\circ(x,y) + i\tau^k U^k(x,y)$, которая преобразуется по закону (2), но не удовлетворяет условию экспонентизации $UU^\dagger = I$. Бесконечный набор полей в ее разложении по y преобразуется при действии группы K линейно и однородно. Более детальное рассмотрение будет проведено в отдельной статье.

---

[1] Отметим возможную параллель с недавними результатами Виттена и др. [3].

Я благодарю И.Я.Арефьева, Б.М.Зупника, Ю.И.Манина, В.Н.Первушина, А.М.Полякова, А.А.Славнова, Л.Д.Фаддеева и, в особенности, В.И.Огиевецкого за интерес к работе и полезные обсуждения.

Объединенный
институт ядерных исследований

Поступила в редакцию
27 июля 1979 г.

Литература

[1] A.M.Polyakov. Phys. Lett., 82B, 247, 1979.

[2] И.Я.Арефьева. Доклад на V Международном совещании по нелокальной квантовой теории поля. Алушта, апрель, 1979; Lett. in Math. Phys. (в печати).

[3] E.Witten. Phys. Lett., 77B, 394, 1978; J.Isenberg, P.B.Yasskin, P.S.Green. Phys. Lett., 78B, 462, 1978.

[4] K.G.Wilson. Phys. Rev., D10, 2445, 1974.

[5] A.M.Polyakov. Nucl. Phys., B120, 429, 1977.

[6] Е.А.Иванов, В.И. Огиевецкий. Письма в ЖЭТФ, 23, 661, 1976; Lett. in Math. Phys., 1, 309, 1976.

[7] P.Kosiński, J.Rembieliński, W.Tybor. J. of Phys. A: Math. and Gen. 9, 1187, 1976.

[8] Е.А.Иванов, В.И.Огиевецкий. ТМФ, 25, 164, 1975.

[9] J.L.Gervais, A.Neveu. Phys. Lett., 80B, 255, 1979.

[10] Y.Nambu. Phys. Lett., 80B, 372, 1979.

[11] E.Corrigan, B.Hasslacher. Phys. Lett., 81B, 181, 1979.