Письма в ЖЭТФ, том 30, вып. 7, стр. 456 – 460 *5 октября 1979 г.*

О НОВОМ КЛАССЕ ТЕОРИЙ ПОЛЯ

С.А.Булгадаев

Показано, что теории поля, эквивалентные классическим газам с обобщенными зарядами, обладающими некоторыми дискретными симметриями, интегрируемы.

В статистической физике важную роль играют двухмерные решеточные модели магнетиков, описываемые в классическом случае гамильтонианом

$$H^{(n)} = \pm \frac{1}{2} \Sigma J_{ij} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j , \tag{1}$$

где s_i — единичные вектора, заданные на узлах решетки, могущие принимать значения на всей n-мерной сфере (непрерывная группа симметрии $O(n)$) [1] или в некоторых ее точках (дискретные группы симметрии) [2]. Знак $\pm$ отвечает антиферро- (АФ) и ферро- (Ф) магнетикам соответственно (для убывающих J_{ij}).

Квадратичность (1) по s_i позволяет записать статсумму $Z^{(n)}$ в переменных, сопряженных s_i. В новых переменных $Z^{(n)}$ имеет вид производящего функционала теории поля на решетке. Например для АФ-модели Изинга ($n = 1$)

$$Z^{(1)} = \sum_{\{s_1\}} \exp(-\beta H^{(1)}) = \int D\phi_i \exp\{-\frac{1}{2} \sum \phi_i J_{ij}^{-1} \phi_j + \sum V(\sqrt{\beta}\,\phi_i)\}, \tag{2}$$

где $V(x) = \ln\cos x$.

Переход к Ф-модели Изинга соответствует замене $\sqrt{\beta} \to \pm i\sqrt{\beta}$, т. е. вместо преобразования Фурье нужно сделать преобразование Лапласа. В результате $Z^{(1)}$ имеет тот же вид, только $V(x) = \ln \operatorname{ch} x$ [3].

С другой стороны известно, что теории поля с $V(x) = \cos x$ и $V(x) = \operatorname{ch} x$ интегрируемы [4] и что первая из них эквивалентна кулоновскому газу [5] (преобразование для газов аналогично преобразованию (2) [5, 6]), гамильтониан которого имеет вид (1) с $n = 1$. Следовательно, при переходе к газу с гамильтонианами из (1) с $J_{ij} = -\frac{1}{2}\pi \ln|x_i - x_j|$ (при этом спины s_i играют роль обобщенных зарядов) получаются локальные теории поля с V, не содержащими ln [7]. В результате для газов с гамильтонианом $H^{(n)}(n \geqslant 2)$ получаем теории поля с потенциалами

$$V_n(x) = (x/2)^{\frac{2-n}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(x) \quad \text{для Ф-газа,} \tag{3а}$$

$$V_n(x) = (x/2)^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(x) \quad \text{для АФ-газа,} \tag{3б}$$

где $x = \sqrt{\beta}\,|\vec{\phi}|$, $|\vec{\phi}| = [\sum_1^n \phi_i^2]^{1/2}$. Отметим, что для Ф-газа с $n = 0$ (газ Ньютона) получается теория поля Лиувилля [8].

Возникает вопрос о свойствах этих теорий. Некоторые из них для теорий с V_n из (3б) приведены в [7]. Интегрируемы ли эти теории пока неясно из-за того, что при $n > 1$ они имеют непрерывную симметрию. Поэтому желательно сначала рассмотреть теории поля, эквивалентные газам с дискретными группами.

Начнем с Ф-газов. Потенциал V в общем случае имеет вид

$$V(\vec{\phi}') = \sum_{i=1}^{N} \exp(s^{(i)} \cdot \vec{\phi}'), \quad \sum_{i=1}^{N} s^{(i)} = 0, \quad \vec{\phi}' = \sqrt{\beta}\,\vec{\phi}, \tag{4}$$

где $\sum_{i=1}^{N}$ есть сумма по всем положениям спина $s^{(i)}$ на сфере. Выпишем потенциалы для некоторых простейших нетривиальных групп.

1) $n = 2$, группы симметрии Z_N.

$$N = 3, \quad V(\vec{\phi}) = e^{\phi'_2} + 2e^{-\frac{1}{2}\phi'_2}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}\phi'_1,$$

$$N = 4, \quad V(\vec{\phi}) = 2[\operatorname{ch}\phi'_1 + \operatorname{ch}\phi'_2].$$

2) $n = 3$, группы симметрии – группы правильных многогранников. Будем их нумеровать по числу вершин N.

$N = 4$, группа тетраэдра, см. общую формулу (5).

$N = 6$, группа октаэдра, $V(\vec{\phi}) = 2\sum_{1}^{3}\operatorname{ch}\phi'_i$.

3) n – произвольное. Первая не тривиальная группа имеет порядок $n+1$. Ей соответствует V из (4), где

$$s^{(i)} = (a_n, b_n a_{n-1}, b_n b_{n-1} a_{n-2}, \ldots, b_n \ldots b_i, 0, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$s^{(n+1)} = (1, 0, \ldots), \quad a_n = -1/n, \quad b_n^2 = 1 - a_n^2. \tag{5}$$

При записи V для групп порядка $n + 1$ всюду использовалась система координат следующего типа. Ось e_n направляется по $s^{(n+1)}$. После проектирования на пространство размерности $n - 1$ получается сфера размерности $n - 2$ с радиусом b_n. На этой сфере лежат вектора, соответствующие проекциям остальных n векторов исходной фигуры. К ним применяется та же процедура и т. д. Следующая группа имеет порядок $2n$, ей соответствует $V(\vec{\phi}) = 2\sum_{1}^{n}\operatorname{ch}\phi'_i$. При такой записи вектора $s^{(i)}$ лежат на осях координат. Отметим что решеточные модели с взаимодействием ближайших соседей, обладающие перечисленными дискретными симметриями групп типа $n + 1$ являются самодуальными. Это является следствием наличия только одной энергии возбуждения [2, 9].

Из вида V для групп порядка $2n$ следует, что соответствующие теории поля интегрируемы. Очень вероятно, что интегрируемыми окажутся и теории поля, отвечающие группам порядка $n + 1$ (в силу их выделенности). Покажем это для $n + 1 = 3$ (группа Z_3) сведением к "двумерной цепочке Тода". Последняя является "двумерным" обобщением обычной цепочки Тода [10] и тоже интегрируема [11]. Ее лагранжиан

$$L_T = \frac{1}{2}(\partial_\mu x_i)^2 - V_T(x_{i+1} - x_i), \quad V_T(x_i) = \sum_{1}^{M}\exp(x_i), \quad x_{i+M} = x_i. \tag{6}$$

Пусть $M = 3$. В нормальных координатах [12] (6) перепишется как

$$L_T = \frac{1}{2}(\partial_\mu q_i)^2 - V(q_i), \quad V(q_i) = e^{-\sqrt{2}q_2} + 2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,q_1\right)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}q_2}. \tag{7}$$

Если положить "центр тяжести" $q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_1^3 x_i = 0$, а $-\sqrt{2}q_2 = \phi'_2$, $\sqrt{2}q_1 = \phi'_1$, то (7) переходит в лагранжиан теории поля, соответствующей группе Z_3, с удвоенной константой взаимодействия. К сожалению, теории поля для групп с $n + 1 > 3$ не удалось преобразовать в цепочку Тода с $M = n + 1$. Возможность их интегрирования изучается. Двумерная цепочка Тода с любым M эквивалентна некоторой "газовой" теории поля. В частности, $M = 4$ соответствует потенциал "изотропного" варианта модели Ашкина – Теллера, которая тоже самодуальна на решетке. Возможно, что каждой цепочке Тода соответствует самодуальная модель на решетке.

Несколько слов о теориях, соответствующих АФ-газам с дискретными группами. Вещественные V получаются только для групп с центром инверсии. Простейшие нетривиальные из них имеют порядок $2n$ с векторами, лежащими на осях. Им отвечают интегрируемые потенциалы $V = 2 \sum_1^n \cos \phi'_i$. Вопрос об интегрируемости остальных V остается открытым.

В то же время свойства АФ-газов с непрерывной симметрией, перечисленные в [7] (с незначительной модификацией для групп без центра инверсии), переносятся на АФ-газы с дискретной симметрией, так как для них достаточно, что бы все вектора $\mathbf{s}^{(i)}$ были одной длины, а газ в целом нейтрален.

Автор благодарен А.В.Михайлову за информацию о цепочке Тода. А.Б.Замолодчиков, по-видимому, первый обратил внимание на скрытую Z_3-симметрию цепочки Тода с $M = 3$ (частное сообщение).

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5 августа 1979 г.

Литература

[1] H.E.Stanley. Phys. Rev. Lett., 20, 589, 1968.

[2] R.B.Potts. Proc. Camb. Phil. Soc., 48, 106, 1952.

[3] G.Baker. Phys. Rev., 126, 2071, 1962; M.Kac, E.Helfand. J. Math. Phys., 4, 1078, 1963.

[4] В.Е.Захаров, Д.Д.Фаддеев, Л.А.Тахтаджян. ДАН СССР, 219, 1334, 1974; M.J.Ablovitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, H.Segur. Phys. Rev. Lett., 30, 1262, 1973.

[5] S.Coleman. Phys. Rev., D11, 2088, 1975; J.Frolich. Comm. Math. Phys., 47, 233, 1976.

[6] А.М.Поляков. ЖЭТФ, 55, 1026, 1968; Nucl. Phys., B120, 429, 1977.

[7] S.A.Bulgadaev. Phys. Lett., (в печати)

[8] В.А.Андреев. ТМФ, 29, 213, 1976.

[9] L.Mittag, M.J.Stephen. J. Math. Phys., 12, 441, 1971; В.С.Доценко. ЖЭТФ, 75, 1083, 1978.

[10] M. Toda. Progr. Theor. Phys. Suppl., 45, 174, 1970; С.В.Манаков. ЖЭТФ, 67, 543, 1974; H.Flaschka. Progr. Theor. Phys., 51, 703, 1974.

[11] А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, этот выпуск стр. 443.

[12] Г.Л.Коткин, В.Г.Сербо. Сб. задач по классической механике, М., 1977.