Письма в ЖЭТФ, том 30, вып. 8, стр. 485 – 488 *20 октября 1979 г.*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ СПЕКТР АНИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА ЛАНДАУ – ЛИФШИЦА

Ю.Н.Кафиев

Используя периодические односолитонные решения уравнения Ландау – Лифшица, вычислен квазиклассический спектр возбуждений.

В ряду полностью интегрируемых уравнений, найденных и исследованных в последнее время, весьма интересным с точки зрения физических приложений является нелинейная "спиновая струна" Гейзенберга (НССГ) – непрерывный аналог соответствующей спиновой цепочки – описываемая уравнением:

$$S^a_t = \epsilon^{abc} S^b S^c_{xx}; \qquad S^a S^a = 1. \tag{1}$$

Для уравнения (1) развит метод обратной задачи [1], получена редукция его к нелинейному уравнению Шредингера [2], что указывает, по-видимому на его полную интегрируемость. В работе [3] авторы, используя развитый ими метод интегрирования по спиновым переменным, получили квазиклассический спектр для НССГ и обнаружили, что он совпадает с точным квантовым ответом Бете [4].

Недавно Боровик [5] привлек внимание к нелинейной спиновой струне Ландау – Лифшица (НССЛЛ), учитывающей анизотропные эффекты:

$$S^a_t = \epsilon^{abc} S^b S^c_{xx} + \beta S^3 \epsilon^{3ab} S^b; \qquad S^a S^a = 1 \tag{2}$$

(в данной работе мы рассматриваем только $\beta > 0$). Боровик указал $L - A$-пару для уравнения (2) и нашел частный случай односолитонного решения. В этой работе мы вычислим квазиклассический спектр НССЛЛ, используя периодическое решение уравнения (2). Следует отметить, что решение Боровика не является наиболее общим так как не учитывает допплеровского изменения частоты прецессии спина при $v \neq$

$\neq 0$. Вводя сферические координаты, запишем:

$$S^a = (\cos\phi\sin\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\theta)\ .$$

Система (2) сводится к двум уравнениям:

$$(\cos\theta)_t = (\sin^2\theta\phi_x)_x\ , \tag{3а}$$

$$\sin\theta\phi_t = \beta\cos\theta\sin\theta + \theta_{xx} - \phi_x^2\sin\theta\cos\theta. \tag{3б}$$

Для односолитонного решения ($\theta = \theta(x - vt)$) уравнения (3) легко интегрируются и общее рашение с правильными граничными условиями есть:

$$\phi = \phi_0 + \left(\epsilon^2 + \frac{v^2}{4}\right)t + v\int^x \frac{dx}{1 + \cos\theta(x - vt)}\ ,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{2(\epsilon^2 + \beta)}{\sqrt{\left(\epsilon^2 + \frac{v^2}{4}\right)^2 + \beta v^2}\left\{\mathrm{ch}^2\left[(x - vt)(\epsilon^2 + \beta)^{1/2}\right] - \frac{1}{2}\right\} + \frac{v^2}{8} + \frac{\epsilon^2}{2} + \beta}\ . \tag{4}$$

Решение в виде (4) было получено ранее в работе [6]. Заметим, что вследствие (3а) величина

$$Q_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos\theta)\,dx \tag{5}$$

не зависит от времени и вместе с гамильтонианом H образует набор интегралов движения НССЛЛ. Жевицкий и Папаниколау [3] показали, что для НССГ результат квазиклассического квантования можно интерпретировать как замену Q_3 целым числом m, сохраняя классическую связь между энергией и импульсом $E = \frac{8(1 - \cos P/2)}{Q_3}$. Авторы [6] предположили, что при $\beta \neq 0$ также можно положить $Q_3 = m$ и связать E с P классическими соотношениями.

Мы вычислим явно квазиклассический спектр для НССЛЛ и покажем, что предположение [6] справедливо лишь при $\beta \to 0$, а в общем случае Q_3 зависит очень сложно от m и ей нельзя придать смысл числа магнонов как в изотропной модели.

Следуя методу работ [7], квазиклассическое квантовые теории поля определяют как вычисление функциональных интегралов вблизи периодических решений уравнений поля и спектр находится из полюсов функции Грина

$$G(E) = i \sum \int_0^\infty dT e^{iET} 2\pi i \Delta_1 e^{iS_{cl}} . \tag{6}$$

В (6) мы пренебрегли квантовыми поправками; они отсутствуют при $\beta = 0$ [3], в нашем случае они могут привести к перенормировке β и для нас не существенны. Наложим условие периодичности на односолитонное решение (4)

$$\frac{2\pi}{\epsilon^2} = \frac{T}{l} \equiv \tau ; \qquad l = 1, 2... . \tag{7}$$

В данной работе из-за недостатка места мы не рассматриваем движения центра масс, т. е. положим везде $v = 0$. Тогда для физических величин получаем (здесь $\widetilde{Q}_3 = \sqrt{\beta}/4\, Q_3$)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} H dx = \frac{8}{\sqrt{\beta}} \epsilon^2 \widetilde{Q}_3 - 4(\epsilon^2 + \beta)^{1/2},$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^1 S^2_x - S^2 S^1_x}{1 + S^3} dx = 2\pi , \tag{8}$$

$$\widetilde{Q}_3 = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\epsilon^2 + 2\beta + 2\sqrt{\beta(\beta + \epsilon^2)}}{\epsilon^2} \right] .$$

Исключая ϵ^2, находим классическую связь между E и $\widetilde{Q}_3$

$$E = 4\sqrt{\beta} \left[\frac{2\widetilde{Q}_3}{\mathrm{sh}^2 \widetilde{Q}_3} - \mathrm{cth} \widetilde{Q}_3 \right] . \tag{9}$$

Используя спиновый лагранжиан работы [3], находим действие S_{cl}

$$S_{cl} = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{S^1_t S^2 - S^1 S^2_t}{1 + S^3} - H \right] =$$

$$= - T \left\{ \frac{2\epsilon^2}{\sqrt{\beta}} \ln \left[\frac{\epsilon^2 + 2\beta + 2\sqrt{\beta(\beta + \epsilon^2)}}{\epsilon^2} \right] + 4(\epsilon^2 + \beta)^{1/2} \right\} . \tag{10}$$

Величина Δ_1 в формуле (6) соответствует свободе в выборе начальных условий (ϕ_0 в (4)) и равна $\Delta_1 = \dfrac{1}{l^{1/2}} \dfrac{2\tau^{1/4}}{(2\pi + \beta\tau)^{1/4}}$. После подстановки

Δ_1 и (10) в (6) и учета условий периодичности (7), вычисляем интеграл методом стационарной фазы. Стационарная точка по r лежит при $\frac{2\pi}{r_0} = \frac{E^2}{16} - \beta$, при этом для $G(E)$ получаем геометрический ряд

$$G(E) = \text{const} \sum_{l=1}^{\infty} \exp(-ilw) f(E) = \frac{e^{-iw}}{1 - e^{-iw}} f(E),$$

где $w = \frac{4\pi}{\sqrt{\beta}} \ln\left[\frac{E + 4\sqrt{\beta}}{E - 4\sqrt{\beta}}\right]$, вид $f(E)$ для нас несущественен. Полюсы в $G(E)$ возникают при $w = 2\pi m$, отсюда находим

$$E_m = 4\sqrt{\beta}\,\mathrm{cth}\,\frac{m\sqrt{\beta}}{4}. \tag{11}$$

При $\beta \to 0$ спектр (11) совпадает с точным квантовым ответом при $P = 4\pi$ для НССГ [3], $E_m = 16/m$ и соответствует квантованию Q_3. Однако при β отличном от нуля, из (9), (11) видно, что Q_3 ограничено сверху и зависит от m сложным образом. Очевидно, что эффект анизотропии нетривиален и при $m\sqrt{\beta}/4 \sim 1$ спектры радикально отличаются: $E_m(\beta)$ перестает зависеть от m. К сожалению, спектр (11) нельзя сравнить с точным квантовым ответом. Легко установить, что НССЛЛ не является пределом какой-либо цепочки, точный квантовый спектр для нее неизвестен. Отличие спектров, а также свойств симметрии для "спиновых струн" Гейзенберга и Ландау — Лифшица отвечает отрицательно на вопрос [5] о возможности редукции одного уравнения в другое. Большой интерес представляет учет движения центра масс для НССЛЛ; поскольку ее уравнения, как и нелинейное уравнение Шредингера и НССГ не являются галилеевски инвариантными, то зависимость от импульса будет нетривиальной. Этот вопрос будет рассмотрен в отдельной работе.

Институт математики
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
3 марта 1979 г.

Литература

[1] L.A.Takhtajan. Phys. Lett., 64A, 235, 1977.

[2] M.Lakshmanan et al. Physica, 84A, 577, 1976.

[3] A.Jevicky, N.Papanicolaou. IAS preprint, July 1978.

[4] H.A.Bethe. Z.Phys., 71, 205, 1931.

[5] А.Е.Боровик. Письма в ЖЭТФ, 28, 629, 1978.

[6] Б.А.Иванов, А.С.Ковалев, А.М.Косевич. ФНТ, 3, 906, 1977.

[7] R.Dashen, B.Hasslacher, A.Neveu. Phys. Rev., D10, 4114, 1974; L.D.Faddeev, V.E.Korepin. Phys. Reports, 42, 1, 1978.