Письма в ЖЭТФ, том 30, вып. 8, стр. 491 – 494 *20 октября 1979 г.*

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОСТИ ДЛИНЫ КОГЕРЕНТНОСТИ

А.С.Тяпин

С целью обобщения уравнений гидродинамики на сверхтекучий вырожденный ферми-газ учтено обусловленное корреляцией импульсов частиц влияние внешнего объема газа на импульс наблюдаемого объема среды.

В сверхтекучих ферми-системах важное значение имеет корреляция импульсов частиц, находящихся на небольшом с макроскопической точки зрения, но конечном расстоянии друг от друга, определяемом длиной когерентности $\xi_0 = \hbar v_F/\Delta_F$. В силу этого, импульсы частиц, находящихся в любом объеме газа V в слое шириной порядка ξ_0 вблизи его границы S, скоррелированы с импульсами внешних частиц; и таким образом внешние частицы влияют на наблюдаемый импульс рассматриваемого объема газа. Поскольку это влияние осуществляется через частицы, находящиеся вблизи границы, и так как корреляции не нарушают условия конечности плотности импульса, учтем это, введя в рассмотрение распределенный по поверхности присоединенный импульс, определяемый тензорной поверхностной плотностью τ. Т. е. представим полный импульс объема газа V в виде

$$\mathbf{J}_V = \int_V \rho \mathbf{v} dV + \oint_S d\mathbf{S}\tau , \tag{1}$$

где ρ — плотность газа; $\mathbf{v}$ — определяемая этим равенством обобщенная скорость. Приводя (1) к обычному выражению для импульса $\int \rho \mathbf{u} dV$, где $\mathbf{u}$ — истинная скорость газа, получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - (\vec{\nabla}\tau)/\rho . \tag{2}$$

τ определим из следующих соображений. В покоящемся газе $\tau = 0$, так как в таком газе $\mathbf{J}_V = 0$ для любого V. Корреляции инвариантны относительно галилеевых преобразований. Значит τ зависит только от производных от скорости по координате. Поскольку ξ_0 мало́, учтем лишь первые производные и ограничимся линейными по ним членами. Поэтому в изотропной среде

$$\tau_{ik} = \eta_1 u_{ik} + \zeta_1 \delta_{ik} \operatorname{div}\mathbf{u} + \lambda_1 \omega_{ik} , \tag{3}$$

где $u_{ik} = \nabla_i u_k + \nabla_k u_i - {}^2/_3\, \delta_{ik} \operatorname{div}\mathbf{u}$; $\omega_{ik} = \nabla_i u_k - \nabla_k u_i$. Коэффициенты в (3), так как газ вырожден, суть функции только плотности. Согласно вычисленным в [1] функциям распределения $\lambda_1 = 0$. Это означает, что корреляции не приводят к появлению дополнительного по сравнению с обычным поля моментов импульсов, так как согласно (1)

$$\mathbf{M}_V = \int_V \rho[\mathbf{r}, \mathbf{v}]dV + \oint_S [\mathbf{r}, d\mathbf{S}\tau] = \int_V \vec{\mu}\, dV,$$

где $\vec{\mu} = \rho\, [\mathbf{r}, \mathbf{u}] + 2\lambda_1 \mathbf{r}\operatorname{rot}\mathbf{u}$. Кроме того, при слабых парных корреляциях ζ_1 мало, а $\eta_1 = \rho \xi_0^2/30$. Эта же оценка получается, если с помощью полученных ниже уравнений вычислить закон дисперсии звуковых колебаний и сравнить его с рассчитанным в [2].

Построим лагранжиан $L_V = \int_V \Lambda dV$. Так как импульс есть производная от лагранжиана по скорости, в силу (1) имеем

$$\delta L_V = \int_V \rho \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV + \oint_S d\mathbf{S}\, \tau \delta \mathbf{u} + \int_V \pi_{ik} \nabla_i (\delta r_k) dV. \tag{4}$$

Третий член здесь записан так, чтобы как в обычной гидродинамике, учесть только работу внутренних поверхностных сил. Используя (2) и равенства $\delta\rho = -\rho\nabla_i(\delta r_i)$, $\nabla_i\delta - \delta\nabla_i = \nabla_i(\delta r_k)\nabla_k$, первое из которых выражает собой закон сохранения массы $\delta(\rho dV) = 0$, из условия, что δL_V полный дифференциал, находим:

$$\pi_{ik} = \left(p - \frac{1}{2}\rho^2 \frac{\partial r_{em}/\rho}{\partial\rho} \nabla_e u_m\right)\delta_{ik} - r_{ie}\nabla_k u_e\ , \tag{5}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} r_{ik}\nabla_i u_k - \mathcal{E}_0\ , \tag{6}$$

где $p = \rho^2 d(\mathcal{E}_0/\rho)/d\rho$; $\mathcal{E}_0(\rho)$ — не определяемая здесь внутренняя энергия газа, для расчета которой при слабых парных корреляциях в вырожденном ферми-газе можно использовать известную томас-фермиевскую оценку. Частная производная от r по ρ означает дифференцирование в r только коэффициентов. Переходя в (4) от переменной скорости к переменной импульса, т. е. полагая

$$\delta E_V = \int_V \delta(\rho\mathbf{v}dV)\mathbf{u} + \oint_S \delta(dS\,r)\,\mathbf{u} - \int_V \pi_{ik}\nabla_i(\delta r_k)dV,$$

получаем выражение для энергии, плотность которой дается выражением (6) с измененным у $\mathcal{E}_0$ знаком.

Учтенные корреляции не затрачивают определений плотности и скорости $\mathbf{u}$. Поэтому по-прежнему верно уравнение неразрывности и, как обычно, $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, а $\delta\mathbf{u} = d\delta\mathbf{r}/dt$. Учитывая это, из минимума действия находим уравнения движения

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \vec{\nabla}\pi = 0. \tag{7}$$

Исключая $\mathbf{v}$, получаем

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \vec{\nabla}p = \rho\mathbf{e} + \rho[\mathbf{u}, \mathbf{b}]\ , \tag{8}$$

где

$$\mathbf{b} = \operatorname{rot}\vec{\mathcal{A}}, \qquad \mathbf{e} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi, \tag{9}$$

$$\vec{\mathcal{A}} = -(\nabla r)/\rho, \qquad \phi = \vec{\mathcal{A}}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\frac{\partial r_{em}}{\partial\rho}\nabla_e u_m. \tag{10}$$

Таким образом, благодаря корреляции импульсов частиц, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, в движущемся газе возникает поле воздействующих на него своеобразных лоренцевых сил.

Полученные уравнения представим также в виде обычных гидродинамических уравнений, но с тензором напряжений

$$\sigma_{ik} = \rho \frac{d\tau_{ik}/\rho}{dt} - \tau_{ek} \nabla_e u_i - \pi_{ik}, \tag{11}$$

содержащим слагаемое с производной по времени. В связи с этим отметим, что идея о присоединенном импульсе естественно объясняет и природу членов с производными по времени, входящими в барнеттовском приближении [3] в выражения для тензора напряжений и теплового потока максвелловского газа. Для этого нужно предположить, что в таком газе $\eta_1 = -\mu^2/p$, где μ – коэффициент вязкости, p – давление. Это означает, что роль длины когерентности в данном случае играет свободный пробег.

Сохраняя в (3) только последний член, полагая $\lambda_1 = -{}^1\!/_4 \rho b^2 \ln(b/a)$, где a, b – внутренний и внешний радиусы ствола вихря, и удерживая лишь члены первого порядка по исследуемым поправкам, запишем полученные уравнения в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathrm{v}) = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathrm{v}}{\partial t} + \nabla \Pi = 0, \tag{12}$$

где

$$\Pi_{ik} = \rho\, v_i\, v_k + \lambda_1 \omega_i\, \omega_k + (p - \lambda_1 \omega^2)\delta_{ik}; \qquad \vec{\omega} = \operatorname{rot} \mathrm{v}$$

Эти уравнения аналогичны используемым при $T = 0$ для описания вращающейся сверхтекучей бозе-жидкости [4].

Эти примеры показывают, что изложенная выше идея о присоединенном импульсе может иметь весьма общее значение. Мы ею воспользовались для того, чтобы не прибегая к сложным микроскопическим расчетам вывести уравнения (2), (7), которые были предварительно найдены путем решения в квазиклассическом приближении боголюбовских уравнений движения и условий самосогласования теории парных корреляций. Такие расчеты готовятся к печати.

Поступила в редакцию
6 августа 1979 г.

Литература

[1] А.С.Тяпин. ТМФ, 35, 406, 1978.

[2] В.А.Андрианов, В.Н.Попов. ТМФ, 28, 340, 1976.

[3] С.Чепмен, Т.Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М., ИИЛ, 1960.

[4] И.М.Халатников. Теория сверхтекучести. М., изд. Наука, 1971.