

# Солитонные структуры волнового поля с произвольным числом колебаний в нерезонансных средах

Д. В. Карташов<sup>1)</sup>, А. В. Ким, С. А. Скобелев

Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 19 июня 2003 г.

После переработки 5 августа 2003 г.

Найден новый класс уединенных решений волнового поля, описывающий распространение в нерезонансной среде солитоноподобных структур циркулярно поляризованного излучения с произвольным числом осцилляций поля. Особенностью этих решений является их плавная перестройка от солитонов шредингеровского типа, соответствующих длинным импульсам со многими осцилляциями, до предельно коротких, фактически, однопериодных видеоимпульсов. Рассмотрена реализуемость таких солитонных структур для поля с линейной поляризацией и численно показана их структурная устойчивость.

PACS: 41.20.Jb, 42.65.-k

1. Общеизвестен интерес, проявляемый к солитонным решениям нелинейных волновых уравнений как к базовым элементарным структурам, играющим фундаментальную роль в нелинейной физике [1]. В настоящее время успехи, достигнутые в области лазерной техники, позволяют экспериментально исследовать процессы нелинейного взаимодействия с веществом электромагнитных импульсов длительностью в несколько периодов оптических колебаний [2–4]. Одним из важных и интересных вопросов в этой связи является возможность солитонных режимов распространения таких предельно коротких импульсов поля в различных нелинейных средах [5, 6]. Теоретический анализ физических явлений, возникающих в процессе данного взаимодействия, затруднен тем обстоятельством, что в условиях предельно малых длительностей неприменим хорошо развитый аппарат нелинейной оптики, использующий приближение медленно меняющейся амплитуды волнового поля. Для корректного описания эволюции поля в этом случае необходимо использовать волновое уравнение, описывающее динамику поля в импульсе как целого, без масштабного разделения на медленную огибающую и высокочастотное заполнение. В настоящей работе в рамках безотражательного приближения рассматривается распространение электромагнитных импульсов с произвольным числом колебаний поля в нерезонансной среде. Показано, что имеет место новый класс точных уединенных решений, описывающий нелинейное распространение волновых импульсов с солитонной структурой огибающей, однако включающей конечное число ос-

цилляций поля. Привлекательной особенностью этих решений является их преемственная связь с солитонными решениями шредингеровского типа, позволяющая проследить переход от шредингеровских солитонов к видеоимпульсам, включающим менее периода оптических колебаний.

2. Будем исходить из векторного волнового уравнения в безотражательном приближении, широко используемом для описания нелинейной динамики предельно коротких импульсов, содержащих небольшое число оптических колебаний. В этом приближении, полагаящем изменения распределений полей малыми на масштабах, соизмеримых с характерными длинами волн, редуцированное волновое уравнение для нерезонансной среды может быть представлено в виде (см. [6])

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z \partial \tau} + n \mathbf{E} + g \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \mathbf{E}^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} \right) + h \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \mathbf{E}, \left[ \mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} \right] \right] = 0, \quad (1)$$

где  $z$  – координата вдоль направления распространения,  $\tau = t - z\varepsilon_o^{1/2}/c$  – время в сопровождающей системе координат,  $\varepsilon_o$  – статическая диэлектрическая проницаемость среды,  $c$  – скорость света в вакууме. Уравнение (1), являясь простейшим типом в своем классе, включает в себя как линейную низкочастотную дисперсию ( $n$ ), так и безынерционную нелинейность среды керровского типа ( $g, h$ ; см., например, [7]). В частности, оно описывает распространение предельно коротких импульсов в оптическом волокне в области аномальной дисперсии [8], а также их самовоздействие в ионизованном газе, в котором плазменная дисперсия преобладает над газовой, связанной с нейтральными частицами [9]. Следует отме-

<sup>1)</sup>e-mail: dekart@ufp.appl.sci-nnov.ru

тить, что волновое уравнение в представленном виде (1) не учитывает “высокочастотную” дисперсию среды, полагая, что спектр оптического импульса достаточно удален от точки нулевой дисперсии и целиком располагается в ее аномальной части. Отметим также, что для резонансных сред исходные уравнения, основанные на модели двухуровневой среды, и анализ соответствующих волновых полей представлены в [10–12] (см. также [5] и цитированную там литературу).

Как нетрудно показать, введением высокочастотного заполнения исходное уравнение (1) редуцируется к нелинейному уравнению Шредингера для медленно меняющейся амплитуды поля.

Рассматривая далее распространение лазерного излучения в среде с электронным типом нелинейности, в которой  $h = 2g/3$ , и используя масштабную инвариантность уравнения (1), запишем его в проекциях на соответствующие оси ( $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y$ ) в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial^2 E_{x,y}}{\partial z \partial \tau} + E_{x,y} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [(E_x^2 + E_y^2) E_{x,y}] = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  – единичные векторы вдоль осей  $x$  и  $y$  декартовой системы координат,  $E_x$  и  $E_y$  – соответствующие проекции вектора электрического поля. Для локализованных распределений поля, как следует из (2), выполняется интегральное соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_{x,y} d\tau = 0, \quad (3)$$

что выражает отсутствие среднего поля и указывает на осциллирующий характер решений. Принимая во внимание, что групповые и фазовые скорости волн также могут различаться, представим решения (2) в виде

$$\begin{aligned} E_x(z, \tau) &= a(z, \tau) \cos \varphi(z, \tau), \\ E_y(z, \tau) &= a(z, \tau) \sin \varphi(z, \tau), \end{aligned}$$

описывающем эволюцию циркулярно поляризованного поля. Тогда для амплитуды  $a(z, \tau)$  и фазы  $\varphi(z, \tau)$  волнового поля получим следующую систему точных уравнений:

$$a_{z\tau} - \varphi_z \varphi_\tau a + a + (a^3)_{\tau\tau} - \varphi_\tau^2 a^3 = 0, \quad (4)$$

$$a \varphi_{z\tau} + a_z \varphi_\tau + a_\tau \varphi_z + 2(a^3)_\tau \varphi_\tau + a^3 \varphi_{\tau\tau} = 0, \quad (5)$$

где нижний индекс означает частную производную по соответствующей переменной. Полагая, что огибающая поля распространяется с постоянной скоростью, ищем решения в виде

$$a(z, \tau) = a(\xi), \quad (6)$$

$$\varphi(z, \tau) = \omega\tau - kz + \int_{-\infty}^{\xi} g(a) d\xi, \quad (7)$$

где  $\xi = \tau - \gamma z$ . Локальные частоты и волновые векторы определяются как  $\varphi_\tau = \omega + g(a)$  и  $\varphi_z = -k - \gamma g(a)$ , соответственно. Подставляя полученные соотношения в уравнение (5) и определяя  $\omega$  как несущую частоту сигнала в пределе малых амплитуд, то есть  $g(a) \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow 0$ , находим, что  $g(a) = \omega a^2 (3\gamma - 2a^2) / 2(\gamma - a^2)^2$ ,  $k = -\gamma\omega$  и окончательно для фазы поля

$$\varphi(z, \tau) = \omega\tau + \gamma\omega z + \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\omega a^2 (3\gamma - 2a^2)}{2(\gamma - a^2)^2} d\xi. \quad (8)$$

Таким образом, импульс поля может включать в себя не только конечное число колебаний, но и должен быть фазомодулированным, то есть содержать частотный чирп в общем случае достаточно сложной формы,  $\varphi_\tau \sim g(a)$ . Уравнение для амплитуды (4) при этом принимает вид

$$u_{\eta\eta} - \frac{6uu_\eta^2}{1-3u^2} - \frac{u}{1-3u^2} \left\{ \delta^2 - \frac{u^2 [4(1-u^2)^2 - u^2]}{4(1-u^2)^3} \right\} = 0. \quad (9)$$

Здесь введены новые переменные  $\eta = \omega\xi$  и  $u = a/\gamma^{1/2}$ , и, как легко видеть в этом случае, семейство солитоноподобных решений является однопараметрическим, то есть зависит от параметра  $\delta^2 = 1/\gamma\omega^2 - 1 > 0$ . В соответствии с первым интегралом уравнения (9), имеющим вид

$$\left( \frac{du}{d\eta} \right)^2 = \frac{u^2}{(1-3u^2)^2} \times \left[ \delta^2 - \frac{3}{2}(\delta^2 + 1)u^2 + \frac{(4-5u^2)u^2}{4(1-u^2)^2} \right] + \frac{C}{(1-3u^2)^2}, \quad (10)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, равная нулю для локализованных распределений поля, его решения в общем случае представимы лишь в квадратурах. Однако возможные типы решений могут быть легко проанализированы на фазовой плоскости, на которой фазовые траектории (10) симметричны относительно оси  $u = 0$ . Ограничиваясь рассмотрением полуплоскости  $u \geq 0$ , видно, что уравнение (9) имеет 4 состояния равновесия: 3 центра и седловая точка в начале координат, разделенные особыми прямыми  $u = 1/\sqrt{3}$  и  $u = 1$ . Вид фазовой плоскости существенно зависит от параметра  $\delta$ . Интересующим

нас солитонным решениям соответствует замкнутая седловая сепаратриса ( $C = 0$ ), существующая только при  $\delta^2 \leq \delta_c^2 = 1/8$  и включающая в себя одно или два состояния равновесия типа центр. При  $\delta^2 < 1/8$  она включает ближайшее состояние равновесия, и типичная фазовая плоскость для этого случая показана на рис.1а. Для этих параметров максимальная ам-

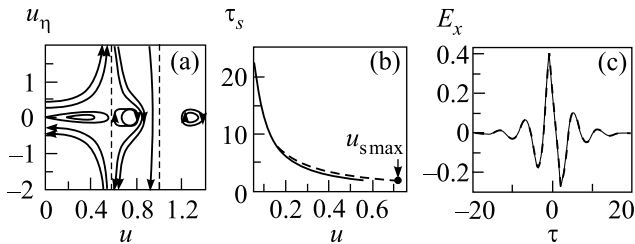


Рис.1

плитуда солитона ограничена сверху:  $u_{\max}^2 < 1/3$ , и ее зависимость от среднеквадратичной длительности, определенной как

$$\tau_s = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 u^2 d\eta / \int_{-\infty}^{\infty} u^2 d\eta \right]^{1/2},$$

представлена на рис.1б. При  $u_{\max}^2 \ll 1$  уравнение (10) может быть проинтегрировано и его приближенное решение представлено в неявном виде:

$$6\delta \sqrt{\delta^2 - \frac{u^2}{2}} - \text{Arch} \left( \frac{\sqrt{2}\delta}{u} \right) = \pm \delta \eta, \quad (11)$$

которое с хорошей точностью описывает динамику поля вплоть до  $\delta \approx \delta_c$ , исключая лишь само предельное значение. На рис.1с показаны характерные осциллограммы поля, соответствующие точному и приближенному солитонным решениям при  $\delta = 0.32$ , включающим в себя около периода оптических колебаний. Как видно, эти решения достаточно близки, их максимальное расхождение составляет менее 3%.

При  $\delta^2 = 1/8$  сепаратрисная траектория качественно меняется, и, ввиду снятия особенности при  $u^2 = 1/3$ , она включает два состояния равновесия (см. рис.2). Данное сепаратрисное решение может быть названо предельным солитоном, соответствующим минимально возможной длительности, включающей по сути менее периода колебаний ( $\tau_{s \min} = 1.84$ ) и, соответственно, максимально возможной амплитуде  $u_{s \max}^2 = 2/3$ . Его точное решение имеет ту же функциональную зависимость, что и (11), однако описывает солитон с максимально допустимой энергией:

$$\frac{\sqrt{2-3u^2}}{3} - (2)^{-1/2} \text{Arch} \left( \frac{2}{3u^2} \right)^{1/2} = \pm \eta/4. \quad (12)$$

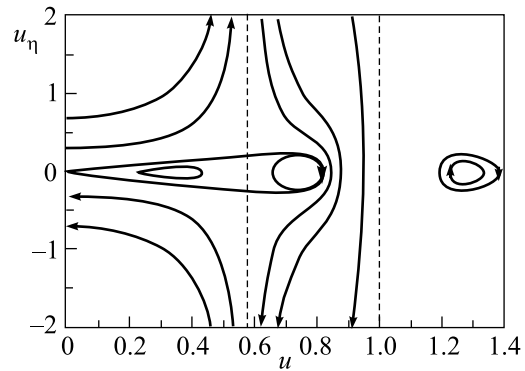


Рис.2

При  $\delta^2 > 1/8$  происходит разрыв замкнутой сепаратрисной траектории, что указывает на отсутствие локализованных решений.

Установим связь полученных решений с хорошо известными солитонами огибающей, существующими в рамках нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) и его обобщений [1, 13]. Длительность найденных локализованных распределений поля (см. рис.1б) примерно обратно пропорциональна их амплитуде, поэтому переход к длинным квазимонохроматическим импульсам, содержащим много осцилляций, осуществляется при малых амплитудах  $u^2 \ll 1/3$ , что, как следует из уравнения (10), имеет место при  $\delta^2 \ll 1/9$ . В этом случае (10) сводится к уравнению для нахождения НУШ солитонов:  $u_\eta^2 = u^2(\delta^2 - u^2/2)$ , имеющим своим решением фундаментальный шредингеровский солитон  $u(\eta) = \sqrt{2}\delta / \cosh(\delta\eta)$ . При увеличении амплитуды длительность солитона уменьшается и все возрастающую роль начинают играть процессы, связанные с дисперсией групповых скоростей различных частотных компонент, что в первую очередь отражается на фазомодулированной структуре импульса (8). Его амплитудная зависимость трансформируется при этом в солитоны обобщенного нелинейного уравнения Шредингера [14], которые, как нетрудно получить из (10), проводя разложение многочленов и удерживая слагаемые следующего порядка малости, имеют вид

$$u(\eta) = \frac{2\delta}{\sqrt{1 + \cosh(2\delta\eta)}}. \quad (13)$$

При дальнейшем увеличении амплитуды длительность солитона становится соизмеримой с периодом оптических колебаний, накладывая тем самым в соответствие с интегралом (3) фактически ограничение сверху на допустимые значения поля, что отражается по сути в существовании предельного со-

литонного решения. Таким образом, можно заключить, что найденные солитонные структуры волнового поля имеют прямую преобладающую связь с солитонными решениями шредингеровского типа и позволяют осуществить переход от солитонов огибающей квазимонохроматического излучения фактически к оптическим видеосолитонам.

**3.** Представляет определенный интерес рассмотреть реализуемость найденных солитонных структур волнового поля применительно к важному случаю линейно поляризованного излучения. Для поля с линейной поляризацией  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E$  уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial \tau} + E + \frac{\partial^2 E^3}{\partial \tau^2} = 0. \quad (14)$$

Как известно, отличие нелинейной динамики линейно поляризованного поля от поля с циркулярной поляризацией заключается прежде всего в возможности более быстрого обогащения спектрального состава и, в первую очередь, на нечетных гармониках в силу кубического характера нелинейности. Однако в рассматриваемой нами диспергирующей среде, описываемой уравнением (14), условия волновых синхронизмов для резонансного, в том числе и нелинейного, возбуждения спектральных гармоник компонент поля, как нетрудно показать, не выполняются. В частности, об этом свидетельствуют численные расчеты [8, 9], показывающие, что в области аномальной дисперсии соответствующие спектральные компоненты малы. Представляя решение уравнения (14) в виде  $E(z, \tau) = (2/\sqrt{3})a(z, \tau) \cos \varphi(z, \tau)$  и полагая компоненты поля на частотах третьей гармоники ( $3\varphi$ ) малыми, получаем уравнения для  $a(z, \tau)$  и  $\varphi(z, \tau)$ , в точности совпадающие с системой уравнений (4) и (5), и, соответственно, то же уравнение (9) для нахождения солитонных распределений поля. Таким образом, анализ солитонных решений для поля с циркулярной поляризацией, выполненный выше, может быть распространен и на линейно поляризованные поля, в нелинейной динамике которых найденные волновые солитоны также должны играть важную роль. Проведенное нами численное моделирование уравнения (14) показало, что солитоны волнового поля являются структурно устойчивыми образованиями, в том числе и относительно соударений, и распространяются без изменения своей огибающей на расстояния, значительно превышающие характерные трассовые масштабы:  $L_{dis} \sim \omega_*^2 / \Delta\omega$  – дисперсионную длину ( $\omega_*$ ,  $\Delta\omega$  – характерная, например, центральная частота и спектральная ширина волнового импульса, соответственно) и  $L_{nl} \sim \Delta\omega / \omega_*^2 E_m^2$  – длину нелинейного вза-

имодействия ( $E_m$  – амплитуда импульса). Этот факт отражен на рис.3, на котором длина распространения

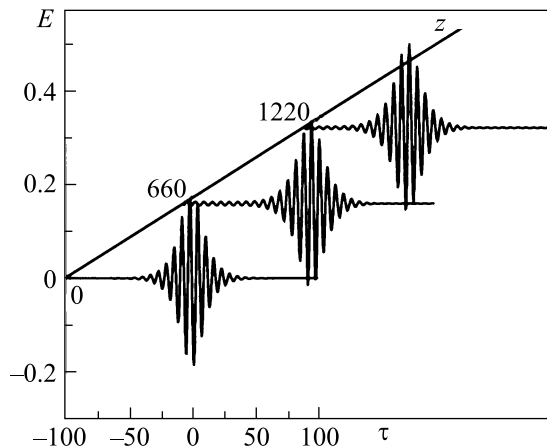


Рис.3

импульса, заданного на входе в виде волнового солитона, составляла около  $400L_{nl}$  (для данного входного распределения поля характерные длины  $L_{dis}$  и  $L_{nl}$  примерно равны и порядка 3–4). Как видно из рисунка, солитонный импульс поля является устойчивым образованием и может распространяться на расстояния, значительно превышающие характерные трассовые масштабы, без изменения своих параметров. Видимая при этом внутренняя динамика связана лишь с изменениями фазы поля (см. (8)). Отметим также, что такие локализованные распределения поля структурно мало видоизменяются при учете высокочастотной дисперсии, описываемой дополнительным слагаемым вида  $\partial^4 E / \partial \tau^4$  в уравнении (14), если спектр входного импульса располагается в области аномальной дисперсии, что коррелирует с численными результатами работы [8].

На рис.4 показана динамика столкновения двух волновых солитонов с разными амплитудами, но одинаковыми несущими частотами ( $\omega = 1$ ) в смысле (8). Как известно, возможность сохранения солитонами своей структуры при столкновениях является одним из важных свойств, определяющих их фундаментальную роль в нелинейной динамике волновых процессов. Из рис.4 видно, что больший по амплитуде солитон догоняет солитон с меньшей амплитудой, далее они проходят сквозь друг друга, восстанавливаясь до прежних распределений после взаимодействия, то есть они проходят без заметного обмена энергией и без потерь на излучение. Этот результат позволяет с большим основанием назвать найденные нами волновые структуры “волновыми солитонами”.

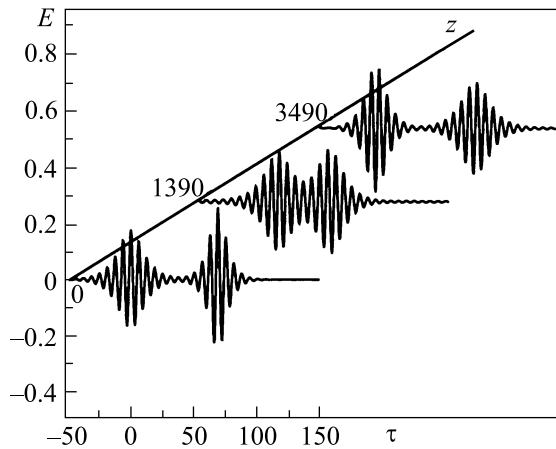


Рис. 4

В заключение хотелось бы отметить, что устойчивость относительно соударений и преимущественная связь рассмотренных волновых солитонов с шредингеровскими позволяет рассматривать их в качестве базовых структур волнового поля, играющих, возможно, такую же фундаментальную роль в нелинейной динамике волновых полей как и солитоны Шредингера. В частности, как показывают численные расчеты, они проявляют себя устойчивыми элементарными составляющими в таком динамическом процессе, как временная компрессия первоначально широкого импульса до весьма малых длительностей, формируя на определенном этапе предельно короткий импульс в несколько осцилляций поля с амплитудой, превышающей амплитуду предельного солитона.

Авторы выражают признательность В. А. Миронову и А. М. Сергееву за интерес к работе и обсуждение ее результатов.

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, М.: Наука, 1980.
2. A. Baltuska, Z. Y. Wei, M. S. Pshenichnikov, and D. A. Wiersma, *Opt. Lett.* **22**, 102 (1997).
3. M. Nisoli, S. De Silvestri, O. Svelto et al., *Opt. Lett.* **22**, 522 (1997).
4. T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
5. А. И. Маймистов, *Квантовая электр.* **30**, 287 (2000).
6. С. А. Козлов, в сб. *Проблемы когерентной и нелинейной оптики*, под ред. Гурова И. П., Козлова С. А., СПб. 2000, с. 12.
7. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
8. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **111**, 404 (1997).
9. A. Nazarkin and G. Korn, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4748 (1999).
10. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Coudrey, and R. K. Bullough, *J. Phys.* **A6**, 1337 (1973).
11. Е. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин и др., *Письма в ЖЭТФ* **47**, 523 (1988).
12. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 558 (2003).
13. A. Hasegawa, *Optical solitons in fibers*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
14. Е. М. Громов, В. И. Таланов, *ЖЭТФ* **110**, 137 (1996).