Письма в ЖЭТФ, том 30, вып. 9, стр. 557 – 560 *5 ноября 1979 г.*

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ЗАПРЕТЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ РЕЖИМОВ КОЛЛАПСА ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Г.М.Фрайман

На основании энергетических оценок показано, что одномодовый автомодельный сверхзвуковой режим коллапса ленгмюровских колебаний с сохранением числа плазмонов и энергии в каверне невозможен ни при какой симметрии распределений поля и плазмы.

1. Одна из центральных задач в теории сильной ленгмюровской турбулентности состоит в исследовании динамики отдельной ячейки турбулентности. Общая ситуация по этому вопросу к настоящему моменту – следующая. В работе [1] были сформулированы основные уравнения, описывающие динамику самофокусировки ленгмюровских колебаний (усредненная по "быстрому" времени система уравнений квазигидродинамики), и показано, что в условиях, характерных для модуляционной неустойчивости, возможно образование особенности. Естественно ожидать, что вблизи момента образования особенности распределения поля и концентрации носят автомодельный характер. Исходя из этого предположения, в [1] были предложены автомодельные подстановки, сводящие задачу к обыкновенным производным, на основании которых был сделан вывод о том, что коллапс носит сверхзвуковой характер с сохранением числа плазмонов в каверне. Эта модель в слегка видоизмененном варианте (после работ [2, 3] считается, что распределения полей и плазмы в каверне не сферически симметричны) использовалась в большинстве работ по сильной ленгмюровской турбулентности (см. последний обзор по этому вопросу [5]).

Собственно вывод о сверхзвуковом коллапсе базируется на результатах численных экспериментов [4], однозначная интерпретация которых в двух- и трехмерных случаях затруднена. Поэтому важное значение приобретают аналитические результаты. В этой работе на основании интегральных свойств решений уравнений движения мы покажем, что сверхзвуковой автомодельный режим коллапса невозможен ни при какой симметрии распределений поля и плазмы.

2. Для краткости и бо́льшей наглядности мы приведем наш анализ на скалярной модели коллапса [6]. Для этого случая подробный вывод используемых ниже равенств выполнен в цитируемой литературе. Обобщение их для случая ленгмюровских полей не вызывает принципиальных затруднений.

Мы исходим из сверхзвуковой скалярной модели коллапса. Исходная обезразмеренная система уравнений:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - nu = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = -\nabla |u|^2, \quad \dfrac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}\mathrm{v} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

обладает рядом интегралов движения. В частности, сохраняется число квантов

$$w = \int |u|^2 d\mathbf{r}, \qquad d\mathbf{r} = dxdydz \tag{2}$$

и энергия

$$H = \int\left(|\nabla u|^2 + n|u|^2 + \frac{\mathrm{v}^2}{2}\right)d\mathbf{r}. \tag{3}$$

Предполагаемое в [6] сферически-симметричное автомодельное распределение аналогично [1] устроено таким образом, что сохраняет оба указанных интеграла. Кроме того, подразумевается, что такое решение физически реализуемо, т. е., что оно устойчиво по отношению к возмущениям. По аналогии с известными примерами из теории самофокусировки естественно предположить, что для устойчивости необходима одномодовость автомодельного распределения концентрации[1]. Можно показать, что все эти требования (сохранение H, W, одномодовость) одновременно невыполнимы.

Действительно, вблизи момента образования особенности, когда распределения поля и концентрации близки к автомодельным:

$$(u, n, \mathrm{v}) = (u, n, \mathrm{v})_{\text{авт}} + (u, n, \mathrm{v})_{\text{фон}}, \tag{4}$$

уравнения гидродинамики для автомодельных распределений скорости и концентрации могут быть легко проинтегрированы для произвольного

[1] Действительно, неустойчивые высшие автомодельные моды таковы, что уравнение Шредингера с соответствующим этим модам распределением потенциала обладает более, чем одной модой дискретного спектра. И наоборот, устойчивые распределения (одномерный солитон, таунсовская мода и т. п.) — одномодовые.

распределения $|u|^2_{\text{авт}}$. Если

$$u_{\text{авт}} = a^{-3/2}\, u(\vec{\xi})\exp i\int\lambda^2 dt, \quad \lambda^2 = \lambda_0^2/a^2, \quad a = (t_0 - t)^{2/3}, \quad \vec{\xi} = \mathbf{r}/a,$$

$$n_{\text{авт}} = a^{-2}\, N(\vec{\xi}), \qquad \mathrm{v} = a^{-3/2}\, \nabla\phi(\vec{\xi}), \tag{5}$$

то конечные во всем пространстве распределения концентрации и скорости определяются единственным образом

$$\phi(\vec{\xi}) = \frac{3}{2}\xi^{-3/2}\int_0^{\xi}\xi^{-1/2}|u|^2 d\xi, \quad \phi(0) = |u(0)|^2,$$
$$N(\vec{\xi}) = \frac{3}{2}\xi^{-2}\int_0^{\xi}\xi\,\Delta\phi\, d\xi. \tag{6}$$

В (6) интегрирование ведется при фиксированных угловых переменных. Для радиально-симметричного случая

$$N(\xi) = \frac{3}{2}\,\xi^{-3/2}\frac{d}{d\xi}\,\xi\,(\phi(\xi) - \phi(0)). \tag{7}$$

Распределения типа (6), (7) слабо локализованы. Согласно (5), (7) при $\xi\to\infty$

$$N(\xi) = -\frac{3}{2}\,\xi^2|u(0)|^2. \tag{8}$$

Наличие такого слабоспадающего распределения, как известно из квантовой механики, при достаточно большой амплитуде "хвоста" приводит к возникновению в соответствующей потенциальной яме новых уровней дискретного спектра, т. е. к неодномодовости. Согласно [7], необходимое условие отсутствия новых уровней —

$$\frac{3}{2}|u(0)|^2 \leqslant \frac{1}{4}. \tag{9}$$

Вычислим теперь автомодельную часть гамильтониана. Легко видеть, что $H_{\text{авт}} = H_\xi/a^2$, где H_ξ — функционал от автомодельного распределения. Поскольку $a(t)\to 0$ ясно, что для сохранения полной энергии необходимо, чтобы $H_\xi = 0$. Подстановка (5), (6), (7) в (3) приводит к выражению

$$H_\xi = \int\left(|\nabla u|^2 - \frac{3}{2}|u(0)|^2\frac{|u|^2}{\xi^2}\right)d\vec{\xi} + \int\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\phi^2}{\xi^2}\right]d\vec{\xi}. \tag{10}$$

Единственное отрицательное слагаемое в (10) связано с тем, что $|u(0)|^2 \neq 0$. Однако условие одномодовости (9) приводит к тому, что первый из интегралов в (10) в целом положителен. Действительно, как известно (см., например, [8]):

$$\int |\nabla u|^2 d\vec{\xi} \geqslant \frac{1}{4} \int \frac{|u|^2}{\xi^2} d\vec{\xi} . \qquad (11)$$

Поэтому с учетом (10) мы получим, что в классе одномодовых распределений

$$H_\xi \geqslant \int \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\phi^2}{\xi^2} \right] d\vec{\xi} > 0 . \qquad (12)$$

3. Все проделанные выкладки могут быть выполнены и для задачи о сверхзвуковом ленгмюровском коллапсе. И в этом случае условие одномодовости совместно с требованиями постоянства W и H приводит к противоречию. В частном случае, когда $|\vec{\epsilon}(0)|^2 = 0$, мы получаем результат работы [3] об отсутствии сверхзвуковых автомодельных режимов в сферически-симметричном случае.

Разумеется, что на ограниченных промежутках времени распределения могут иметь квазиавтомодельный вид, что, по-видимому, и демонстрирует численный эксперимент [6]. Однако, как нам представляется, при построении теории нелинейной стадии модуляционной неустойчивости в отдельной ячейке необходимо отказаться от сохранения числа плазмонов в каверне, оставаясь в рамках дозвукового режима схлопывания, как и в двухмерной задаче. При этом, диссипируемая в каверне энергия существенно меньше, чем в существующих оценках.

Наконец отметим, что собственно задача о скалярном коллапсе интересна и сама по себе применительна к электрон-фононному взаимодействию в твердотельной плазме и задаче о стрикционной самофокусировке трехмерных сгустков электромагнитных колебаний.

Я благодарен А.Г.Литваку, М.А.Миллеру и В.Е.Семенову за полезные обсуждения.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
31 марта 1979 г.

Литература

[1] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, **62**, 1745, 1972.

[2] А.Г.Литвак, Г.М.Фрайман, А.Д.Юнаковский. Письма в ЖЭТФ, **19**, 23, 1974.

[3] Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, **67**, 12, 1974.

[4] Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров. Препринт ИПМ №106, 1974.

[5] L.I.Rudacov, V.H.Tsitovich. Phys. Reports Sect. Cof. Lett., **40**, №1, 1978.

[6] О.Б.Буднева, В.Е. Захаров, В.С.Сннах. Физика плазмы, **1**, 606, 1975.

[7] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, М., изд. Наука, 1974.

[8] О.А.Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., изд. Наука, 1970.