Письма в ЖЭТФ, том 30, вып.9, стр. 567 – 570 *5 ноября 1979 г.*

РАЗРЫВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНОГО БЕССИЛОВОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Н.А.Боброва, С.И.Сыроватский

Для периодического одномерного бессилового магнитного поля получены равновесная функция распределения, инкремент и критерий разрывной неустойчивости в бесстолкновительном и слабостолкновительном режимах.

Разрывная неустойчивость (тиринг-мода) одномерного бессилового магнитного поля детально изучена в гидродинамическом приближении как численно [1], так и аналитически [2]. Вместе с тем для многих приложений к разреженной плазме (солнечная корона, магнитосфера, некоторые лабораторные эксперименты) гидродинамическое приближение неоправдано и плазма должна рассматриваться как бесстолкновительная или слабостолкновительная [3, 4]. Ниже для этих условий будут получены критерий и инкременты неустойчивости одномерного бессилового магнитного поля вида

$$\mathbf{B}_o = B_o \{ \cos az, \sin az, 0 \}. \tag{1}$$

Это поле является точным решением уравнений магнитной гидростатики при исчезающе малом значении плазменного параметра $\beta = 8\pi p / B^2$:

$$\mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0, \ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \tag{2}$$

В более широком плане, поле (1) можно рассматривать как локальную апроксимацию произвольного поля с малым β и заданным широм a.

Равновесная функция распределения определяется через интегралы движения в поле (1):

$$f_a = f_a\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \frac{2p_a}{m_a}\phi,\ v_x + \frac{p_a}{m_a c}A_x,\ v_y + \frac{p_a}{m_a c}A_y\right),$$

где a – обозначает сорт частиц ($a = e, i$), m_a – масса, e_a – заряд электрона и иона, $\mathbf{A}$ и ϕ – векторный и скалярный потенциалы, определяемые из уравнений Максвелла, в которых плотность заряда и тока выражены через функцию распределения (3). В частности, для поля (1) и при $\phi = 0$ рассмотрим функцию распределения

$$f_a = \frac{n_o}{(2\pi m_a)^{3/2} T_{a\parallel} T_{a\perp}^{1/2}} \exp\left\{-\left[\frac{m_a}{2T_{a\perp}} v_z^2 + \frac{m_a}{2T_{a\parallel}}\left\{\left(v_x + \frac{p_a B_o}{c m_a}\frac{\Delta T_a}{T_{a\perp}}\frac{\cos az}{a}\right)^2 + \left(v_y + \frac{e_a B_o}{c m_a}\frac{\Delta T_a}{T_{a\perp}}\frac{\sin az}{a}\right)^2\right\}\right]\right\}, \tag{4}$$

где шаг поля однозначно связан с разностью ΔT_a продольных $T_{a\parallel}$ и поперечных $T_{a\perp}$ температур:

$$a = \left(\frac{4\pi e^2 n_o}{c^2} \sum_a \frac{\Delta T_a}{m_a T_{a\perp}}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Для разрывной неустойчивости необходимо существование резонансной поверхности $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0$ [3, 5]. Следует подчеркнуть, что в действительности условие появления сильных токов и, в частности, тиринг-неустойчивости является интегральным и требует замкнутости резонансных магнитных силовых линий [6, 7]. Неявно это подразумевается и в условии $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, которое можно записать в виде $\mathbf{B} \cdot \mathrm{grad}\, \Phi = 0$, где Φ – произвольная функция, например, потенциал пространственного заряда. Отсюда видно, что требовать $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ мы имеем право лишь на замкнутых магнитных силовых линиях. В этом отношении случай одномерного бессилового поля (1) является вырожденным: для любого $\mathbf{k}$ вида $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, 0\}$ существует поверхность $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, и можно было бы думать, что резонансные поверхности непрерывно заполняют пространство [8]. В действительности же, магнитное поле не может быть бессиловым всюду (теорема Шафранова) [9]. Поэтому, если рассматривать (1) лишь как апроксимацию поля $\mathbf{B}$ для ограниченной области, то резонансными (особыми по терминологии работы [6]) будут лишь те магнитные силовые линии, которые вне этой области замыкаются на себя. В частности, таких линий может вообще не оказаться, и тогда не будет ни разрывной неустойчивости, ни, тем более, "перекрытия" резонансов [8].

Если же особые линии в рассматриваемом объеме действительно имеются, то исследование разрывной неустойчивости сводится к решению задачи в двух областях: внешней и внутренней вблизи резонансной поверхности $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$.

Рассмотрим возмущения следующего вида:

$$F_1(x, y, z, t) = F_1(z) \exp\{ i\,(k_x x + k_y y) + \omega t \}. \tag{6}$$

Во внешней области вне зависимости от частоты столкновений ν_c задача сводится к рассмотрению адиабатически медленных возмущений в рамках идеальной МГД. Решение задачи во внутренней области для бесстолкновительной ($\omega >> \nu_c$) и слабостолкновительной ($\omega < \nu_c$) плазмы было найдено в работе [4]. Скачок логарифмической производной функции $\psi = B_{1z} / B_0$ равен соответственно:

$$\Delta' = \frac{2\sqrt{\pi}\,\kappa_0^2\,\omega}{\omega\,\overline{v}_e\,a} \qquad (\text{при } \omega >> \nu_c), \tag{7}$$

где v_e – тепловая скорость электронов, $\kappa_0 = k_0 / a$; $k_0 = \omega_{pe}/c$, ω_{pe} – плазменная частота, $\kappa = k/a$ или

$$\Delta' = \frac{8\,\pi^{1/4}\,\Gamma(11/4)}{3}\;\frac{\kappa_0^2\,\omega^{3/2}}{\kappa\, v_e\, a\, \nu_c^{1/2}} \quad (\text{при } \omega < \nu_c). \tag{8}$$

По аналогии с [2] сшивая решения во внешней и внутренней областях, получим следующее уравнение:

$$\psi'' + \psi\,\{(1 - \kappa^2) - \Sigma\,\Delta'\,\delta\,(k B_0)\} = 0, \tag{9}$$

в котором присутствие δ-функций учитывает возможные разрывы производной в окрестности поверхностей $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$. Заметим, что уравнение (9) имеет вид уравнения Шредингера для частицы, движущейся в периодическом потенциале [10]. Из решения этого уравнения получается дисперсионное уравнение для неустойчивых гармоник, связывающее ω, κ и "продольное" волновое число Q, характеризующее сдвиг возмущений на соседних резонансных поверхностях:

$$\cos Q\pi = \cos\sqrt{1-\kappa^2}\,\pi + \Delta'\,\frac{\sin\sqrt{1-\kappa^2}\,\pi}{2\sqrt{1-\kappa^2}}\,. \tag{10}$$

Отсюда как в бесстолкновительном, так и в слабостолкновительном режимах неустойчивость будет только при

$$\kappa^2 + Q^2 < 1\,. \tag{11}$$

Инкремент неустойчивости бесстолкновительной плазмы

$$\omega = \frac{(\cos Q\pi - \cos\sqrt{1-\kappa^2}\,\pi)\;\kappa\sqrt{1-\kappa^2}}{\sqrt{\pi}\,\kappa_0^2\,\sin\sqrt{1-\kappa^2}\,\pi}\,v_e a\,, \tag{12}$$

а слабостолкновительной

$$\omega = \left\{\frac{3}{4\pi^{1/4}\Gamma\,(11/4)}\;\frac{(\cos Q\pi - \cos\sqrt{1-\kappa^2}\,\pi)\,\kappa\sqrt{1-\kappa^2}}{\kappa_0^2\,\sin\sqrt{1-\kappa^2}\,\pi}\,v_e a\,\nu_c^{1/2}\right\}^{2/3}. \tag{13}$$

Максимальный инкремент достигается для $Q = 0$ и при $\kappa \backsim \kappa_0^{-1/2}$ в случае бесстолкновительной плазмы или $\kappa \backsim \kappa_0^{1/4}(\nu_c/v_e a)^{1/2}$ в случае слабостолкновительной плазмы, когда еще применимы выражения (7) и (8). Как для бесстолкновительной, так и для слабостолкновительной плазмы максимальный инкремент неустойчивости

$$\omega_{max} \backsim \kappa_0^{-3/2}\,(v_e a\,). \tag{14}$$

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14 июля 1979 г.

Литература

[1] M.A.Cross, G.Van Hoven. Phys. Rev., A4, 2347, 1971.

[2] Н.А.Боброва, С.И.Сыроватский . Физика плазмы, вып. 4, 1980 г.

[3] B.Coppi, G.Laval, R.Pellat. Phys. Rev. Lett., 16, 1207, 1966.

[4] J.F.Drake, Y.C.Lee. Phys. Fluids, 20, 1341, 1977.

[5] H.P. Furth, J.K.Killen, M.N.Rosenbluth. Phys. Fluids, 6, 459, 1963.

[6] S.I.Syrovatskii. Astrophys. Sp. Sci., 56, 3, 1978.

[7] С.И.Сыроватский. Известия АН СССР, сер. физ., 41, 1782, 1977.

[8] D.S.Spicer. Solar Phys., 53, 249, 1977.

[9] В.Д.Шафранов. Сб. "Вопросы теории плазмы". М., Госатомиздат, вып.2, 1963, стр.92.

[10] R.de L.Kronig, W.G.Penney. Proc. Roy. Soc., 130, 499, 1931.