Письма в ЖЭТФ, том 30, вып.9, стр. 633 – 638 *5 ноября 1979 г.*

НОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В МОДЕЛИ SINE-GORDON ПРИ БОЛЬШОЙ КОНСТАНТЕ СВЯЗИ

В.Е.Корепин

Показано, что в модели sine-Gordon при $\gamma \to 8\pi$ возникает богатый спектр частиц, а матрица рассеяния солитонов оказывается разрывной функцией связи.

Модель SG (sine-Gordon):

$$L = \frac{1}{\gamma} \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_\mu u \right)^2 + M_0^2 (\cos u - 1) \right\}, \quad \frac{8\pi}{\gamma'} \equiv \frac{8\pi}{\gamma} - 1, \quad \mu \equiv \pi - \frac{\gamma}{8} \tag{1}$$

эквивалентна МТ (массивной модели Тирринга) [1, 2]:

$$L = \int dx \left\{ i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2} g \left(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\right)^{2} \right\} . \tag{2}$$

Спектр масс МТ получен в [3, 4], S-матрица в [5]. В настоящей работе показано, что при $16\pi/3 < \gamma < 8\pi$ спектр масс и S-матрица задаются совершенно новыми формулами. Непосредственные вычисления проводятся в МТ, однако, согласно традиции, используется язык модели SG. Точные квантовые ответы непосредственно в SG можно получать с помощью квантового метода обратной задачи [6, 7]. Формулы, которые используются в настоящей работе, являются непосредственным матричным обобщением формул, полученных в [8].

В [9] показано, что наблюдаемые в МТ удобно вычислять с помощью собственных функций квантового гамильтониана МТ [10]:

$$\phi = \int d^{l}x\, \chi^{a_1 \dots a_l}(x_1, \dots, x_l \mid \beta_1, \dots, \beta_l)\, \psi^{+a_1}(x_1) \dots \psi^{+a_l}(x_l) \mid 0 > ,$$

$$\chi^{a_1 \dots a_l}(x_1, \dots, x_l \mid \beta_1, \dots, \beta_l) = \prod_{k=1}^{l} \chi^{a_k}(x_k \mid \beta_k) \prod_{j > i} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{2} \epsilon(x_j - x_i) \Phi(\beta_j - \beta_i) \right\},$$

$$\chi^{a}(x \mid \beta) = \begin{pmatrix} \exp\left\{ \frac{1}{2}\beta \right\} \\ \exp\left\{ -\frac{1}{2}\beta \right\} \end{pmatrix} \exp\{ i x m \operatorname{sh}\beta \} , \qquad \psi^{a}(x) \mid 0 > = 0 . \tag{3}$$

Здесь $\epsilon(x)$ — знаковая функция, β — быстрота псевдочастицы, $\exp\{i\Phi(\beta)\}$ — матрица рассеяния двух псевдочастиц:

$$\Phi(\beta) = -i \ln\left\{ -e^{-2i\mu}(e^{\beta} - e^{2i\mu})(e^{\beta} - e^{-2i\mu})^{-1} \right\} \quad \mu = \frac{\pi + g}{2} . \tag{4}$$

Оказывается, что n-псевдочастиц образуют связанное состояние, если знак величины

$$\sin(p\mu)\sin((n-p)\mu) \quad , \quad p = 1, 2, \dots, n-1 \tag{5}$$

не зависит от p. Для того чтобы проанализировать связанные состояния, удобно разбить весь интервал $0 < \mu < \pi/3$ на отрезки:

$$\pi/(q+2) < \mu < \pi/(q+1) , \quad q = 2, 3, \dots \tag{6}$$

Очевидно, что на каждом отрезке существуют связанные состояния с

$$n = 1, 2, \ldots, q \ . \tag{7}$$

Массы этих состояний отрицательны $m_n = -m\sin(n\mu)/\sin\mu$. Известно, что связь констант взаимодействия (1) и (2) зависит от схемы перенормировки [1, 2, 4]. При квантовании с помощью (3) спектры масс совпадают, если $g = \pi - \gamma/4$.

Важнейшим пунктом является вопрос о физическом вакууме, т.е. состоянии с наинизшей энергией. В [9] показано, что при $0 < \gamma < 16\pi/3$ вакуум – это вектор в пространстве Фока, в котором заполнены все состояния элементарной псевдочастицы с отрицательной энергией. При $16\pi/3 < \gamma$ – это уже неверно. Внесение в такой вакуум связанного состояния двух псевдочастиц понижает его энергию. В настоящей работе, показано, что физический вакуум различается на всех отрезках (6). На отрезке (6) вакуум строится из связанных состояний псевдочастиц с $n = 1, \ldots, q$ (7). Причем все состояния этих комплексов заполнены. Приступим к вычислениям. Для регуляризации поместим систему в периодический ящик длиной L и произведем ультрафиолетовое обрезание $|\mathrm{Re}\,\beta| < \Lambda$. Обозначим через β_j^n – разрешенные значения вещественной части быстроты связанного состояния n-псевдочастиц в вакууме. Уравнения периодичности вакуумной волновой функции (3) в пределе $L \to \infty$ решаются обычным образом [11, 9]. Требование стабильности β_j^n при $\Lambda \to \infty$ приводит к следующей формуле ренормировки (совпадает с обычной ренормировкой при $0 < \gamma < 16\pi/3$ [8]):

$$m = (\pi - 2\mu)\, M \exp\left\{ \frac{\pi - 2\mu}{2\mu}\,\Lambda \right\}. \tag{8}$$

Рассмотрим над вакуумом возбуждения с нулевым зарядом. Сделаем дырку в n-й компоненте конденсата с быстротой β_n. При этом разрешенные значения быстрот вакуумных частиц изменяется. Обозначим их через $\tilde{\beta}_j^n$. В пределе $L \to \infty$ условия периодичности соответствующей функции (3) превратятся в уравнения для величины $F_a(\beta_j^n/n) = (\beta_j^a - \tilde{\beta}_j^a)/(\beta_{j+1}^a - \beta_j^a)$ [11, 9]:

$$\Phi_a'^{\,n}(\beta) = 2\pi f_a'(\beta/n) + \sum_{b=1}^{q} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_b'^{\,a}(\beta - \alpha)\, f_b'(\alpha/n)\, d\alpha \ .$$

Здесь (4)

$$f_a(\beta/n) = F_a(\beta + \beta_n/n), \quad \Phi_a^n(\beta) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{a-1} \Phi(\beta + i\mu(a - n + 2j - 2p)).$$

С помощью преобразования Фурье получим, что ненулевые компоненты решения имеют вид

$$f_l'(\beta|l+1) = f_{l+1}'(\beta|l) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{d\beta}\,\ln\left\{\frac{\exp\{\pi\beta/2\mu\} - i}{\exp\{\pi\beta/2\mu\} + i}\right\}, \quad l = 1, \ldots, q-1,$$

$$f_q^{\bullet}(\beta|q)=\frac{i}{2\pi}\frac{d}{d\beta}\int_0^{\infty}\left(\frac{dx}{x}\right)\frac{\operatorname{sh}(4\pi x/\gamma_c^{\bullet}-x/2)\operatorname{sh}(4ix\pi\beta/\mu\gamma_c^{\bullet})}{\operatorname{sh}(x/2)\operatorname{ch}(4\pi x/\gamma_c^{\bullet})}, \quad (9)$$

$$\gamma_c^{\bullet}/8\pi=\pi/\mu-q.$$

Наблюдаемые значения энергии и заряда имеют обычный вид:

$$E_n=m\frac{\sin(n\mu)}{\sin\mu}\operatorname{ch}\beta_n-m\sum_{b=1}^{q}\frac{\sin(b\mu)}{\sin\mu}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\operatorname{ch}\beta F_b^{\bullet}(\beta|n)\,d\beta,$$

$$Q_n=-n+\sum_{b=1}^{q}b\int_{-\Lambda}^{\Lambda}F_b'(\beta/n)\,d\beta.$$

С помощью (8) и (9) получим, что E_n, Q_n, и массы M_n равны:

$$E_n=M_n\operatorname{ch}\theta_n,\ M_n=2M\sin(n\mu)/\operatorname{tg}\mu,\ Q_n=0,\ n=1,\dots,q-1,$$

$$E_q=M_q\operatorname{ch}\theta_q,\quad Q_q=-\pi/2(\pi-q\mu), \quad (10)$$

$$M_q=M\left\{\sin(q-1)\mu/\sin\mu+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{\mu}-q-1\right)\sin q\mu/\sin\mu\right\}.$$

Здесь θ наблюдаемая быстрота $\theta=\pi\beta/2\mu$. Рассмотрим другие возбуждения Внесем в вакуум элементарную псевдочастицу с положительной энергией и быстротой β_p. Аналогичные вычисления показывают, что:

$$f_q^{\bullet}(\beta|p)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\beta}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{4\pi}{\gamma_c^{\bullet}}\left(\frac{\pi\beta}{\mu}+i\pi\right)}{\operatorname{ch}\frac{4\pi}{\gamma_c^{\bullet}}\left(\frac{\pi\beta}{\mu}-i\pi\right)},\ f_l^{\bullet}(\beta|p)=0,\ l=1,\dots,q-1,$$

$$Q_p=\pi/(\pi-\mu q),\ E_p=0. \quad (11)$$

Внесение связанного состояния $(q+1)$ псевдочастицы (5) приводит к таким ответам

$$f_q^{\bullet}(\beta/q+1)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\beta}\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{4\pi}{\gamma_c^{\bullet}}\left(i\pi+\frac{\pi\beta}{\mu}\right)}{\operatorname{sh}\frac{4\pi}{\gamma_c^{\bullet}}\left(i\pi-\frac{\pi\beta}{\mu}\right)},\ f_l'(\beta|q+1)=0,$$

$$l=1,\dots,q-1, \quad (12)$$

$$Q_{q+1}=Q_p=\pi/(\pi-\mu q),\ E_{q+1}=0.$$

Внесение в вакуум любого другого связанного состояния (5) приводит к ответам: $E_n = 0$, $Q_n > Q_p$. Итак рассмотрены все возбуждения над вакуумом. Очевидно, что в секторе с вакуумным зарядом энергия всех возбуждений положительна. Окончательно на отрезке (6) в спектре теории имеется $(q - 1)$ нейтральная частица и одна заряженная (10) будем называть ее солитоном. Состояния рассеяния солитона на антисолитоне строится обычным образом [3, 9]. Это две дырки в q-й компоненте конденсата с быстротами β_1 и β_2 и связка, в зависимости от пространственной четности состояния, это либо элементарная псевдочастица, либо связанное состояние $(q + 1)$ псевдочастицы с быстротой $(\beta_1 + \beta_2)/2$.

Перейдем к вычислению S-матрицы. Наблюдаемая фаза рассеяния дырок имеет вид $\ln S_b^a = 2\pi i f_a(\beta \mid b)$. Фаза рассеяния дырок на связке имеет вид $\ln U_+^a(\beta) = 2\pi i f_a\left(\frac{\beta}{2} \,\middle|\, q+1\right)$, $\ln U_-^a(\beta) = 2\pi i f_a\left(\frac{\beta}{2} \,\middle|\, p\right)$ С помощью этих формул легко вычислить S-матрицу физических частиц (10). Отличны от единицы следующие матричные элементы (9):

$$S_{l+1}^{l}(\theta) = \frac{ie^{\theta} + 1}{e^{\theta} + i}, \quad l = 1, \dots, q-1, \quad \theta = \theta_{l+1} - \theta_l$$

и $S_q^q(\theta)$. Формулы (9), (11), (12) показывают, что матрица рассеяния солитона на антисолитоне задается формулой Замолодчикова [5, 12] с заменой $\gamma \to \gamma_c$:

$$S_{ss}^{\pm}(\theta \mid \gamma) = U_{\pm}(\theta \mid \gamma_c)\, S(\theta \mid \gamma_c), \quad \gamma_c = 8\pi\, \frac{\pi - \mu q}{\pi - \mu(q-1)},$$

$$S(\theta \mid \gamma) = \exp\left\{ -\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}\, \frac{\operatorname{sh}(8i\theta x/\gamma')\, \operatorname{sh}\left(\frac{4\pi}{\gamma'} x - \frac{1}{2} x\right)}{\operatorname{sh}(x/2)\, \operatorname{ch}(4\pi x/\gamma')} \right\},$$

$$U_+(\theta \mid \gamma) = \frac{\operatorname{sh} \frac{4\pi}{\gamma'}(i\pi + \theta)}{\operatorname{sh} \frac{4\pi}{\gamma'}(i\pi - \theta)}, \quad U_-(\theta \mid \gamma) = -\frac{\operatorname{ch} \frac{4\pi}{\gamma'}(\theta + i\pi)}{\operatorname{ch} \frac{4\pi}{\gamma'}(\theta - i\pi)}.$$

В конце мне хочется выразить благодарность Л.Д.Фаддееву за постановку задачи и обсуждения.

Институт математики
им. В.А.Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2 октября 1979 г.

Литература

[1] S.Coleman. Phys. Rev., D 11, 2088, 1975; S.Mandelstam. Phys. Rev., D 11, 3026, 1975.

[2] А.К.Погребков, В.Н.Сушко. ТМФ, 24, 425, 1975; 26, 419, 1976.

[3] J.Johson, S.Krinsky, B.McCoy. Phys. Rev., A8, 2526, 1973.

[4] A.Luther. Phys. Rev., **B14**, 2153, 1976.

[5] А.Б.Замолодчиков. Письма в ЖЭТФ, **25**, 499, 1977.

[6] Е.К.Склянин, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, **40**, 194, 1979.

[7] Л.Д.Фаддеев. Препринт ЛОМИ Р-2-79, Ленинград, 1979.

[8] В.Е.Корепин. ТМФ, **41**, №2, 1979.

[9] H.Berknoff, H.B.Thacher. Preprint FERMILAB-Pub-78/61-THY, 1978; Preprint FERMILAB-Pub-78/84-THY, 1978.

[10] Ф.А.Березин, В.Н.Сушко. ЖЭТФ, **48**, 1293, 1965.

[11] C.N.Yang, C.P.Yang. Phys. Rev., **150**, 321, 1966.

[12] B.Berg, M.Karowski, W.R.Theis, H.J.Thun. Phys. Rev., **D17**, 1172, 1978.