Письма в ЖЭТФ, том 30, вып.1, стр. 32 – 35 *5 июля 1979 г.*

L-A-ПАРА СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

В.А.Белинский

Найдена L-A-пара, соответствующая связанной системе уравнений Эйнштейна – Максвелла для того случая, когда метрика и электромагнитный потенциал зависят лишь от двух переменных и инвариант электромагнитного поля $F^{ik}F_{ik}$ равен нулю.

В работе Захарова и автора [1] были приведены L-A-уравнения, соответствующие уравнениям гравитации в вакууме для того случая, когда метрика зависит лишь от времени t и одной пространственной переменной z. В работе [2] было отмечено, что та же техника остается применимой и в пространстве, заполненном идеальной жидкостью с уравнением состояния $\epsilon = p$. В настоящей статье мы хотели бы указать еще один случай интегрируемых уравнений общей теории относительности. Оказывается, что связанная система уравнений Эйнштейна – Максвелла допускает существование L-A-пары, если 1) метрика и электромагнитный потенциал зависят лишь от двух переменных, 2) заряды и токи отсутствуют и 3) инвариант электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik}$ равен нулю.

Запишем интервал в той же форме, что и в [1]:

$$-ds^2 = f(-dt^2 + dz^2) + g_{ab}\,dx^a dx^b, \tag{1}$$

где f и g_{ab} зависят только от t и z. Координаты обозначим как $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$. Латинские индексы a, b, c и d будут относиться к координатам x, y и пробегать значения 1, 2. Три латинских индекса i, k, l отнесем к четырехмерному пространству и будем придавать им значения 0, 1, 2, 3. Электромагнитному полю пусть отвечает потенциал A_i и тензор $F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k}$. В рассматриваемом здесь случае уравнения Эйнштейна – Максвелла имеют форму:

$$F_{ik}F^{ik} = 0, \quad F^{ik}_{\ \ ;k} = 0, \quad R^k_i = \frac{1}{2} F_{il} F^{kl}. \tag{2}$$

Из условий совместности этой системы с метрикой (1) и свободы калибровки потенциала A_i следует, что электромагнитное поле должно иметь вид

$$A_0 = A_3 = 0, \quad A_a = A_a(t, z), \quad F_{0a} = \dot{A}_a, \quad F_{3a} = A'_a, \tag{3}$$

где точка и штрих означают производные по t и z. Введя световые переменные ζ и η:

$$t = \zeta - \eta, \quad z = \zeta + \eta \tag{4}$$

легко показать, что система уравнений (2) приобретает следующую форму:

$$g^{ab} A_{a,\zeta} A_{b,\eta} = 0, \tag{5}$$

$$(a g^{ab} A_{b,\eta})_{,\zeta} + (a g^{ab} A_{b,\zeta})_{,\eta} = 0, \tag{6}$$

$$(a g_{ac,\zeta}\, g^{cb})_{,\eta} + (a g_{ac,\eta}\, g^{cb})_{,\zeta} = -a g^{cb} (A_{a,\zeta} A_{c,\eta} + A_{a,\eta} A_{c,\zeta}), \tag{7}$$

$$(\ln f)_{,\zeta} (\ln a)_{,\zeta} - (\ln a)_{,\zeta\zeta} - \frac{1}{4} g_{ac,\zeta}\, g_{bd,\zeta}\, g^{cb} g^{ad} = \frac{1}{2} g^{ab} A_{a,\zeta} A_{b,\zeta} \tag{8}$$

$$(\ln f)_{,\eta} (\ln a)_{,\eta} - (\ln a)_{,\eta\eta} - \frac{1}{4} g_{ac,\eta}\, g_{bd,\eta}\, g^{cb} g^{ad} = \frac{1}{2} g^{ab} A_{a,\eta} A_{b,\eta}, \tag{9}$$

где через a обозначен квадратный корень из детерминанта двумерной матрицы g_{ab}, удовлетворяющий, как это следует из (5) и (7), простому волновому уравнению.

$$\det g_{ab} = \alpha^2, \quad \alpha_{,\zeta\eta} = 0. \tag{10}$$

Основными в системе (5) – (9) являются первые три уравнения (5) – – (7), определяющие компоненты метрического тензора g_{ab} (и обратного ему g^{ab}) и электромагнитный потенциал A_a. Соотношение (5) есть дополнительное условие $F_{ik} F^{ik} = 0$, (6) представляют собой уравнения Максвелла, а (7) следуют из ab-компонент уравнений Эйнштейна. После решения этой системы метрический коэффициент f находится из соотношений (8) и (9).

Для построения L-A-уравнений, соответствующих системе (5) – (7), вводим те же, что и в [1] коммутирующие в силу (10) операторы D_1 и D_2:

$$D_1 = \partial_\zeta - \frac{2\alpha_{,\zeta}\lambda}{\lambda - \alpha}\partial_\lambda, \quad D_2 = \partial_\eta + \frac{2\alpha_{,\eta}\lambda}{\lambda + \alpha}\partial_\lambda \tag{11}$$

и ψ-функцию, которая теперь должна состоять из двумерной матрицы $\psi_{ab}(\lambda, \zeta, \eta)$ и двумерного вектора $\psi_a(\lambda, \zeta, \eta)$. Искомые линейные дифференциальные уравнения, определяющие ψ_{ab} и ψ_a имеют вид следующей системы:

$$D_1\psi_{ab} = \frac{1}{\lambda - \alpha}(-\alpha g_{ad,\zeta} g^{ac} - \alpha A_a A_{d,\zeta} g^{dc})\psi_{cb} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda - \alpha}(\alpha g_{ad,\zeta} g^{dc} A_c + \alpha A_a A_{d,\zeta} g^{dc} A_c - \alpha A_{a,\zeta})\psi_b, \tag{12}$$

$$D_2\psi_{ab} = \frac{1}{\lambda + \alpha}(\alpha g_{ad,\eta} g^{dc} + \alpha A_a A_{d,\eta} g^{dc})\psi_{cb} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda + \alpha}(-\alpha g_{ad,\eta} g^{dc} A_c - \alpha A_a A_{d,\eta} g^{dc} A_c + \alpha A_{a,\eta}), \tag{13}$$

$$D_1\psi_a = \frac{1}{\lambda - \alpha}(-\alpha A_{d,\zeta} g^{dc})\psi_{ca} + \frac{1}{\lambda - \alpha}(\alpha A_{d,\zeta} g^{dc} A_c)\psi_a, \tag{14}$$

$$D_2\psi_a = \frac{1}{\lambda + \alpha}(\alpha A_{d,\eta} g^{dc})\psi_{ca} + \frac{1}{\lambda + \alpha}(-\alpha A_{d,\eta} g^{dc} A_c)\psi_a. \tag{15}$$

Легко видеть, что при $A_a = 0$ из (12) – (15) следуют L-A-уравнения для вакуума, указанные в работе [1].

Прямой проверкой можно убедиться в том, что условия совместности системы (12) – (15) в точности совпадают с уравнениями (5) – (7) и никаких новых связей на g_{ab} и A_a не дают.

Если построено решение ψ системы (12) – (15), то метрические коэффициенты g_{ab} и электромагнитный потенциал A_a непосредственно даются значениями ψ-функции при нулевом значении спектрального параметра λ согласно соотношениям

$$\psi_{ab}(0,\zeta,\eta) = g_{ab} + A_a A_b \ , \ \psi_a(0,\zeta,\eta) = A_a \, . \tag{16}$$

Укажем теперь способ нахождения уравнений (12) – (15). Объединим компоненты g_{ab} и A_a в симметричную трехмерную матрицу j вида:

$$j = \begin{pmatrix} g_{ab} + A_a A_b & A_a \\ A_a & 1 \end{pmatrix} \qquad j^{-1} = \begin{pmatrix} g^{ab} & -g^{ac} A_c \\ -g^{ac} A_c & 1 + g^{dc} A_d A_c \end{pmatrix} . \tag{17}$$

Детерминант j совпадает с детерминантом g_{ab} и равен α^2. Если теперь образовать две трехмерные матрицы U и V

$$U = -\alpha j_{,\zeta} \, j^{-1} \ , \qquad V = \alpha j_{,\eta} \, j^{-1} \tag{18}$$

то нетрудно показать, что одно 3×3 матричное уравнение

$$U_{,\eta} - V_{,\zeta} = 0 \tag{19}$$

эквивалентно системе (5) – (7). Уравнения (18) – (19) вместе с соотношением $\det j = \alpha^2$, где α – та же функция, что и в (10), повторяют теперь систему уравнений, исследованную в работе [1], с той лишь разницей, что входящие в них матрицы стали трехмерными и одна из диагональных компонент матрицы j должна быть единицей ($j_{33} = 1$). Таким образом, L-A-пара для (18) – (19) записывается в форме

$$D_1 \psi = \frac{1}{\lambda - \alpha} U \psi \ , \quad D_2 \psi = \frac{1}{\lambda + \alpha} V \psi \ , \tag{20}$$

где ψ – трехмерная матрица. Отсюда непосредственно следует система (12) – (15), если под ψ_{ab} понимать левый верхний двумерный блок трехмерной матрицы ψ, а под ψ_a – двумерный вектор ее третьей строки ($\psi_a = \psi_{3a}$). Оказывается, как уже отмечено выше, такая часть системы (20) составляет необходимые и достаточные L-A-уравнения для исходной задачи (5) – (7).

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15 мая 1979 г.

Литература

[1] В.А.Белинский, В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 75, 1953, 1978.

[2] В.А.Белинский. ЖЭТФ, 77, вып.10, 1979.