Письма в ЖЭТФ, том 30, вып. 1, стр. 39 – 44 *5 июля 1979 г.*

ОБ АНОМАЛЬНО МЕДЛЕННОЙ СТОХАСТИЗАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В.Е.Захаров, М.Ф.Иванов, Л.Н.Щур

Численно изучается вопрос о стохастизации начального условия в рамках нелинейного уравнения Клейна – Гордона. Показано, что частный случай классических уравнений Янга – Миллса обнаруживает отсутствие стохастизации.

1. В последние годы интенсивно развивались методы точного интегрирования возникающих в физике нелинейных уравнений, в частности двумерных релятивистски-инвариантных моделей теории поля (см., например, [1]). Однако, несмотря на достаточную общность и мощность этих методов, они не в состоянии дать ответ на вопрос – интегрируема ли данная, наперед заданная модель. Ответ на этот вопрос вряд ли вообще может быть получен в рамках чисто аналитических построений. В настоящей статье мы хотим обратить внимание на то, что к решению этого вопроса можно с успехом привлечь методы численного моделирования на ЭВМ.

Мы изучали двумерные модели теории поля, описываемые нелинейным уравнением Клейна – Гордона

$$U_{tt} - U_{xx} + F(U) = 0. \qquad F(u) = u^3 \qquad (1)$$

Современные аналитические методы позволяют интегрировать уравнение (1) в двух случаях

$$F(U) = c_1 \exp(\lambda x) + c_2 \exp(-\lambda x) \qquad [2]$$

и

$$F(U) = c_1\exp(\lambda x) + c_2\exp(-2\lambda x) \qquad [3]^{1)},$$

(c_1, c_2, λ — произвольные константы). Можно показать, что только в этих случаях система (1) имеет нетривиальные (отличные от импульса и энергии) интегралы вида

$$I = \int f(U, U_t, U_x, U_{xt}, U_{xx}, \ldots)dx. \tag{2}$$

В наших экспериментах $F(U)$ выбиралась полиномом по нечетным степеням U. Такого рода модели часто используются в теории поля. Так, в связи с проблемой спонтанного нарушения симметрии вакуума, в ряде работ рассматривалось поле Хиггса [4]

$$F(U) = -m^2U + U^3.$$

Исключительно важным для классической и квантовой теории поля является вопрос об интегрируемости классического поля Янга — Миллса

$$[\nabla_i, F_{ik}] = 0, \qquad F_{ik} = [\nabla_i, \nabla_k]. \tag{3}$$

Косвенным указанием на возможность его интегрируемости является тот факт, что в евклидовом пространстве-времени частные решения уравнения (3) задаются уравнением самодуальности

$$F_{ik} = \pm\frac{1}{2}\epsilon_{iklm}F_{lm},$$

которое, как показано в [5], является интегрируемой системой. В простейшем случае калибровочной группы SU_2, когда A_i можно считать трехмерными изотопическими векторами, уравнение (3) может быть приведено к виду (1) подстановкой

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_4} = 0, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = 0, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{n}U, \quad \mathbf{A}_4 = \mathbf{m}U,$$

$$n^2 = m^2 = 1, \qquad (\mathbf{nm}) = 0 \tag{4}$$

при этом

$$U_{tt} - U_{xx} + U^3 = 0. \tag{5}$$

2. В тех случаях, когда уравнения (1) имеют в качестве решений солитоны, вопрос об интегрируемости может быть до некоторой степени решен численным моделированием столкновения солитонов. (На неинтегрируемость указывает неупругость столкновения. Для поля Хиггса неупругость столкновения была установлена в работе [8]). Однако, уравнение (5) не имеет решений солитонного типа. Поэтому для выясне-

[1)] Работа А.В.Михайлова будет опубликована позже.

ния вопроса об интегрируемости разумно рассматривать задачу о стохастизации произвольного начального условия уравнения (1) при периодических граничных условиях.

Эта постановка восходит к классической работе Ферми, Паста и Улама [6]. Из фридмановских принципов статистической механики следует, что эволюция начального условия достаточно общего вида должна демонстрировать тенденцию к равнораспределению энергии по степеням свободы. На языке фурье-гармоник по X это означает, что должен наблюдаться поток энергии в область больших волновых чисел K. При этом функция распределения энергии в k-пространстве E_k должна стремиться к константе (в силу конечности полной энергии), а величина $J = \sum_k k^2 E_k^2$ — неограниченно возрастать. Гладкость функции $U(x)$ будет при этом резко ухудшаться, демонстрируя тенденцию к стохастизации — превращению ее в белый шум. Сохранение гладкости $U(x)$, равно как и сохранение среднего значения J в течение достаточно большого времени, с определенностью указывает на существование в системе (1) скрытых интегралов движения, и, возможно, на ее интегрируемость. Дополнительным указанием на интегрируемость является квазипериодическое поведение величины E_k в том случае, когда начальное условие содержит небольшое число фурье-гармоник.

Поскольку классификация интегрируемых систем типа (1) далека от завершения, а также потому что и в неинтегрируемых случаях уравнение (1) может иметь частные квазипериодические решения, начальное условие

$$U_o(x) = U(x, t)\big|_{t=0}$$

должно выбираться в достаточно общем виде. В противном случае есть опасность оказаться вблизи квазипериодического движения, и тогда сохранение величины J будет лишний раз демонстрировать справедливость теории Колмогорова — Арнольда — Мозера (см., например, [7]).

3. Уравнение (1) решалось нами при периодических граничных условиях

$$U\big|_{x=0} = U\big|_{x=2\pi}, \quad U_x\big|_{x=0} = U_x\big|_{x=2\pi}.$$

В качестве начального условия $U_o = U\big|_{t=0}$ выбирался отрезок тригонометрического ряда

$$U_o(x) = U_o + \Sigma a_n \cos(nx + \phi_n),$$

U_o, a_n — случайные числа в интервале (0,1), ϕ_n — случайные числа в интервале $(0,2\pi)$. Характерный график функции $U_o(x)$ приведен на рис. 2,е. На рис. 1 и рис. 2 приведены графики $J(t)$ и вид решения $U(x)$ при $t = 3\pi$ для четырех разных видов функции $F(U)$. Рис. 1,а, 2,а соответствуют интегрируемому случаю "sine-Gordon". Рис. 1,б, 2,б соответствуют задаче Янга — Миллса $F(U) = 10U^3$. Рис. 1,с, 2,с соответствуют полиному $F(U) = 10(U - 0{,}6U^3 + 0{,}1U^5)$, не имеющему нулей кроме $U = 0$. Рис. 1,d, 2d — полиному $F(U) = 10U(U^2 - 0{,}1089)(U^2 - 0{,}36)\times$

$\times (U^2 - 0{,}81)$, имеющему при $U > 0$ три нуля. На рис. 3 изображен график $J(t)$ для уравнения (5) при начальном условии

$$U_0 = 0{,}8 + 0{,}2\cos X.$$

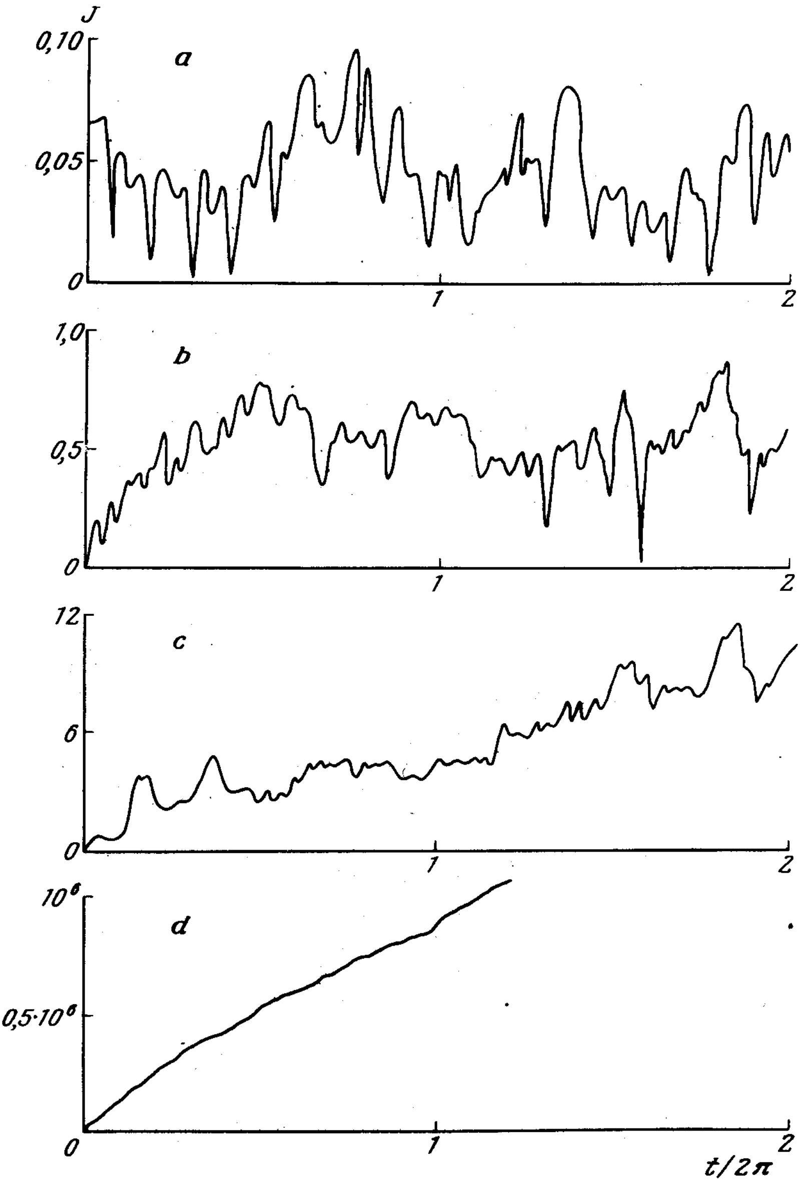

Рис. 1. Зависимость функции J от времени для уравнений: a) $U_{tt} - U_{xx} + 10\sin U = 0$; b) $U_{tt} - U_{xx} + 10U^3 = 0$; c) $U_{tt} - U_{xx} + 10(U - 0{,}6U^3 + 0{,}1U^5) = 0$; d) $U_{tt} - U_{xx} + 10U(U^2 - 0{,}1089)(U^2 - 0{,}36)(U^2 - 0{,}81) = 0$; при начальном условии, изображенном на рис. 2,e

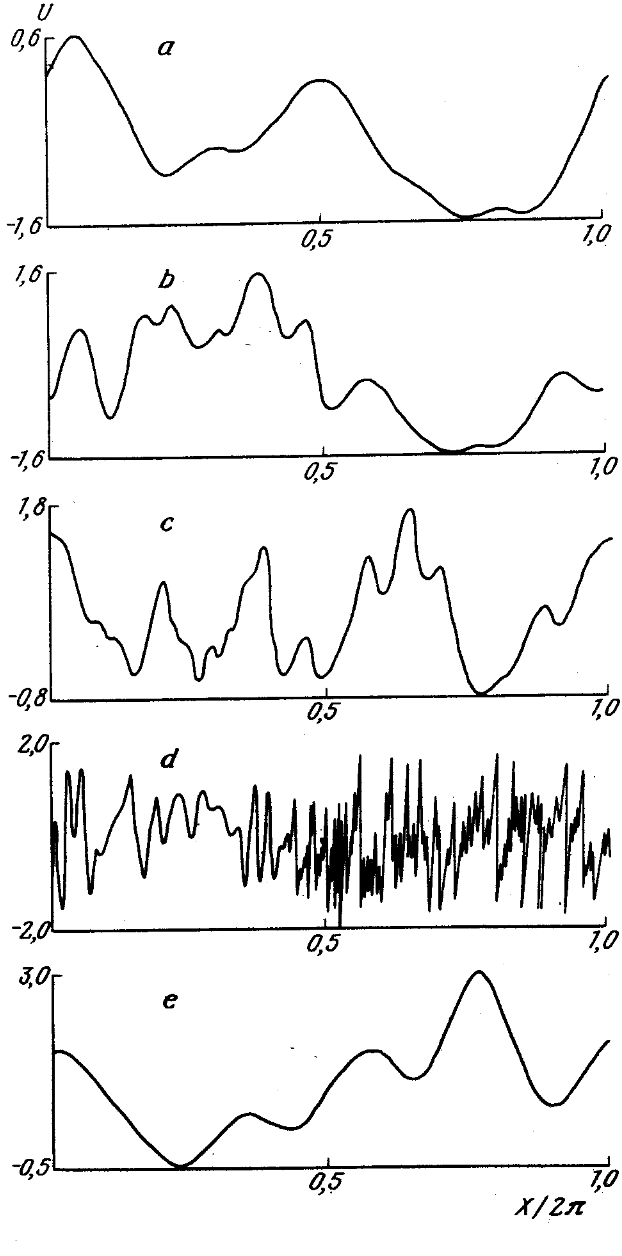

Рис. 2. Вид решения в момент времени $t = 3\pi$ для уравнений, указанных в подписи к рис. 1. (2,*a* – 2,*д*), 2,*e* – начальное условие

Результаты численных экспериментов показывают, что полином $F(U)$ общего вида обнаруживает тенденцию к стохастизации и задает неинтегрируемую систему. Эта тенденция резко ускоряется, если $F(U)$ имеет дополнительные нули, что объясняется существованием в системе неустойчивых стационарных состояний. С другой стороны, поведение системы (5) практически ничем не отличается от поведения интегрируемой системы "sine-Gordon". Этот результат позволяет надеяться, что уравнение (5) (и, возможно, полная система уравнений Янга – Миллса (3)) имеет скрытые интегралы движения более сложной формы, чем (2) и является интегрируемой системой.

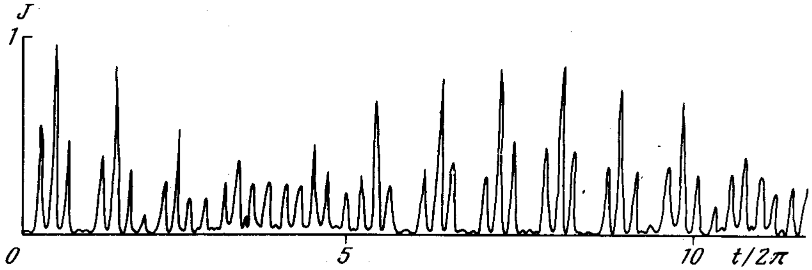

Рис. 8. Зависимость функции J от времени для уравнения (5) при начальном условии $U_o(X) = 0{,}8 + 0{,}2\cos X$

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность С.В.Манакову и Я.Г.Синаю, принимавшим активное участие в обсуждении работы на всех этапах ее выполнения.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17 мая 1979 г.

Литература

[1] В.Е.Захаров, А.В.Михайлов. ЖЭТФ, 74, 1953, 1978.
[2] M.J.Ablowitz, D.S.Kaup et al. Phys. Rev. Lett., 30, 1262, 1973.
[3] А.Б.Шабат. ДАН (в печати).
[4] P.Higgs. Phys. Lett., 12, 132, 1966.
[5] А.А.Белавин, В.Е.Захаров. Письма в ЖЭТФ, 25, 603, 1977.
[6] Э.Ферми. Научные труды. М., II, 1972.
[7] В.И.Арнольд. УМН, 18, 13, 1963.
[8] V.G.Makhankov. Physics Reports, 35, 1, 1978.