Письма в ЖЭТФ, том 30, вып.6, стр. 328 – 330 20 сентября 1979 г.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Е.А.Кузнецов, М.Д.Спектор, Г.Е.Фалькович

Показано, что слабая ударная волна неустойчива относительно поперечных модуляций.

1. До сих пор вопрос об устойчивости ударных волн рассматривался в рамках идеальной газодинамики. В этом случае, как известно [1], разрывы устойчивы относительно поперечных возмущений. Остается, однако, открытым вопрос об устойчивости ударных волн с конечной шириной фронта. Эта задача интересна и тем, что она непосредственно связана с проблемой сильной звуковой турбулентности. Существующие два подхода к этой проблеме предсказывают различные виды спектра турбулентности: $\epsilon_k \sim k^{-2}$ [2] и $\epsilon_k \sim k^{-3/2}$ [3].

Согласно первой точке зрения звуковая турбулентность представляет собой совокупность слабовзаимодействующих ударных волн, а ее спектр ϵ_k определяется в основном разрывами. Альтернативная точка зрения состоит в том, что существенную роль играет взаимодействие волн, распространяющихся под углом $\theta \sim (v/c_s)^{1/2}$ друг к другу (здесь v – скорость возмущений, c_s – скорость звука). Этот процесс приводит к изотропизации спектра.

В данной работе мы покажем, что слабые ударные волны неустойчивы относительно поперечных возмущений, их инкремент максимален в области углов $\theta \sim (v/c_s)^{1/2}$.

2. Как известно [4], одномерное распространение звуковых волн малой амплитуды описывается уравнением Бюргерса:

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} = 0,$$

где μ – коэффициент "вязкости". Это уравнение имеет решение в виде ударной волны, распространяющейся со скоростью v,

$$u_o(x - vt) = v[1 - \mathrm{th}\,\frac{v}{2\mu}(x - vt)] \tag{1}$$

с величиной скачка $2v$ и шириной фронта $l = 2\mu/v$. Учет слабой поперечной модуляции таких волн приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + uu_x - \mu u_{xx}) = -\frac{c_s}{2}\Delta_\perp u, \tag{2}$$

аналогичному уравнению Кадомцева – Петвиашвили для неодномерных волн в слабодиспергирующей среде. В рамках этого приближения рассмотрим вопрос об устойчивости ударных волн.

Линеаризуя уравнение (2) на фоне стационарного решения (1), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}[\delta u_t + u_o \delta u_x + \delta u u_{ox} - \mu \delta u_{xx}] = -\frac{c_s}{2}\Delta_\perp \delta u .$$

Перейдем далее к безразмерным аргументам $x \to (x - vt)\dfrac{v}{2\mu}$, $t \to t\dfrac{v^2}{4\mu}$ и введем новую переменную $\psi = \mathrm{ch}\, x\, \delta u$. Для возмущений вида $\psi(x) e^{-Et + i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp}$ возникает следующая спектральная задача для несамосопряженного оператора L третьего порядка:

$$L\psi = \mathrm{ch}\, x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mathrm{ch} x}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2}{\mathrm{ch}^2 x} + (1 - E)\right]\psi = ak^2\psi, \qquad (3)$$

где $a = 4c_s\mu^2/v^3$. При $k = 0$ эта спектральная задача сводится к определению спектра оператора Шредингера

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 - \frac{2}{\mathrm{ch}^2 x} - E\right)\psi = 0$$

с безотражательным потенциалом. Этот оператор обладает одним дискретным уровнем $E = 0$ с собственной функцией $\psi_0 = 1/\mathrm{ch}\, x$ и непрерывным спектром $E = 1 + p^2 > 0$

$$\psi_p = -\frac{1}{1 - ip}\,\mathrm{ch}\, x \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ipx}}{\mathrm{ch}\, x}.$$

Ударная волна, таким образом устойчива относительно одномерных возмущений с $k = 0$. При этом безразлично устойчивой собственной функции ψ_0 соответствует возмущение бесконечно малого сдвига $\delta u = \partial u_0/\partial x$. Устойчивость ударной волны при малых ak^2 определяется смещением уровня $E = 0$, которое найдем по стандартной схеме теории возмущений. Для этого представим ψ в виде:

$$\psi = c_0\psi_0 + \int_{-\infty}^{\infty} c_p\psi_p\, dp.$$

Введем в рассмотрение также функции $\widetilde{\psi}$ сопряженной задачи ($L^+\widetilde{\psi} = 0$), они связаны с ψ соотношениями:

$$\widetilde{\psi}_0 = -x\psi, \quad \widetilde{\psi}_p = -\frac{e^{ipx}}{1 - ip} - \frac{2ip}{p^2 + 1}\psi_p.$$

Уравнения для коэффициентов c_0 и c_p непосредственно следуют из (3), как условие ортогональности к собственным функциям $\widetilde{\psi}_0$ и $\widetilde{\psi}_p$:

$$-Ec_0 = \frac{ak^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} c_p \langle\widetilde{0}\,|\,p\rangle\, dp,$$

$$(p^2 + 1 - E)c_p = \frac{ak^2}{2\pi}\left[c_0\langle\widetilde{p}\,|\,0\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} c_p\langle\widetilde{p}\,|\,p'\rangle\, dp'\right],$$

где матричные элементы

$$\langle\widetilde{p}\,|\,0\rangle = \langle\widetilde{0}\,|\,p\rangle^* = -\frac{\pi}{1 + ip}\,\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi p/2)}.$$

Отсюда поправка к уровню $E = 0$ возникает во втором порядке теории возмущений:

$$E^{(2)} = -\frac{(ak^2)^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|<\widetilde{0}|p>|^2}{p^2+1}\,dp = -\frac{(ak^2)^2}{4}\left[\zeta(3)+\frac{\pi^2}{6}\right] < 0. \quad (4)$$

Таким образом, слабая ударная волна неустойчива относительно поперечных модуляций. Инкремент этой неустойчивости, как это следует из (4) растет с увеличением k и достигает своего максимума в области $ak^2 \sim 1$ или $(kl)^2 \sim v/c_s$. Величина максимума пропорциональна v^2/μ, т.е. оказывается порядка времени опрокидывания. Принципиально, что неустойчивые возмущения локализованы на фронте волны. Поэтому развитие этой неустойчивости приведет к турбулизации фронта ударной волны.

В заключение авторы благодарят И.Б.Хрипловича за полезное обсуждение.

Институт автоматики
и электрометрии
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
12 июля 1979г.

Литература

[1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред, М., ГИТТЛ, 1953.

[2] Б.Б.Кадомцев, В.И.Петвиашвили. ДАН СССР, **208**, 794, 1973.

[3] В.Е.Захаров, Р.З.Сагдеев. ДАН СССР, **192**, 297, 1970.

[4] В.И.Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., изд. Наука, 1973.