Письма в ЖЭТФ, том 26, вып. 1, стр. 6 – 10 *5 июля 1977 г.*

ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ ЖЕЛОБКОВОЙ ДРЕЙФОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ θ-ПИНЧА

Л.А.Большов, Ю.А.Дрейзин, А.М.Дыхне

Из двухжидкостной гидродинамики получена система уравнений, удобная для описания развитых дрейфовых потоков частиц и энергии в плазме θ-пинча. Получен общий критерий устойчивости неоднородной плазмы в прямом поле по отношению к дрейфовым колебаниям желобкового типа. Качественно исследован нелинейный режим.

Из двухжидкостной гидродинамики получена система уравнений, удобная для описания развитых дрейфовых потоков частиц и энергии в плазме θ-пинча. Эти потоки могут приводить к остыванию плазмы за время eBa^2/cT (a – радиус пинча). Получен общий критерий устойчивости неоднородной плазмы в прямом поле по отношению к дрейфовым колебаниям желобкового типа. Качественно исследован нелинейный режим.

1. Аномально большой вынос тепла поперек магнитного поля из горячей области плазмы, находящейся в механическом равновесии, может быть обусловлен косыми (дрейфовыми) потоками тепла в неоднородной плазме. Перераспределение тепла, связанное с этими потоками, приводит к возникновению сравнительно медленных движений плазмы со скоростью $v_{\text{др}} \sim cT/eBa$, много меньшей скорости звука. Важную роль в таких процессах играет генерация магнитного поля. В незамагниченной плазме последний эффект рассмотрен в [1]. В некоторых конфигурациях дрейфовые потоки оказываются замкнутыми и не приводят к выносу энергии. В работах [2, 3] было показано, что такие конфигурации могут оказаться неустойчивыми по отношению к нерезонансной раскачке дрейфовых колебаний желобкового типа. Дрейфовые движения с масштабами, превышающими ионный гирорадиус, и временами, превышающими время ион-ионных столкновений, можно описывать с помощью уравнений двухжидкостной гидродинамики [4]. В случае $(\omega_H\tau)_{e,i} >> 1$ и $\frac{8\pi nT}{B^2}(\omega_H\tau)_e >> 1$ можно пренебречь в них малыми членами, описывающими диссипативные эффекты (поперечную теплопроводность, диффузию магнитного поля, термосилу, джоулево и вязкое тепло). Упрощенная система уравнений, описывающая косые бездиссипативные потоки тепла и вызванную ими конвекцию плазмы, обладает, как показано ниже, особой структурой, которая позволяет отделить описание тепловых потоков от конвекции.

2. Для простоты изложения рассмотрим случай $\beta = 8\pi nT/B^2 >> 1$, (стеночное удержание [5, 6]), физически особенно интересный, поскольку при этом есть опасность, что за счет генерации магнитное поле может значительно уменьшиться в части поперечного сечения пинча, и потери тепла резко возрастут. При $\beta \to \infty$ можно положить $\mathrm{v}_e = \mathrm{v}_i = \mathrm{v}$, поскольку $|\mathrm{v}_e - \mathrm{v}_i| << |\mathrm{v}| \sim v_{\text{др}}$. Исходим из уравнений баланса частиц и энергий (ср. [4]).

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{v}\,\nabla n + n\,\mathrm{div}\,\mathrm{v} = 0,$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} + \mathrm{v}\nabla p_e + \frac{5}{3}\,p_e\,\mathrm{div}\,\mathrm{v} = -\frac{2}{3}\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}_{e\wedge} = -\frac{5}{3}\,\mathrm{div}\frac{p_e}{B}\left[\nabla\frac{p_e}{n}, \hat{z}\right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \mathrm{v}\,\nabla p_i + \frac{5}{3}\,p_i\,\mathrm{div}\,\mathrm{v} = -\frac{2}{3}\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}_{i\wedge} = -\frac{5}{3}\,\mathrm{div}\frac{p_i}{B}\left[\nabla\frac{p_i}{n}, \hat{z}\right] \quad (2)$$

$$b \equiv eB/c \quad (3)$$

Предполагается, что $\mathbf{B} \parallel \hat{z}$; $\mathrm{v} \perp \hat{z}$; $(\hat{z}\,\nabla) \equiv 0$; $\hat{z}$ – орт оси z. В дрейфовых движениях инерция не важна и уравнение движения плазмы может быть заменено уравнениями (при $nT >> B^2/_{8\pi}$):

$$p_e + p_i = p = \mathrm{const} \quad (4)$$

$$\left(\mathrm{rot}\, n\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right)_z = 0. \quad (5)$$

Из $\partial\mathbf{B}/\partial t = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}$ и уравнения движения электронов $-en\mathbf{E} - \frac{en}{c}[\mathrm{v}, \mathbf{B}] - \nabla p_e = 0$, в котором опущены малые силы трения об ионы, инерция электронов и вязкая сила, получим уравнение для $b = eB/c$:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathrm{v}\,\nabla b + b\,\mathrm{div}\,\mathrm{v} = \left(\mathrm{rot}\frac{\nabla p_e}{n}\right)_z = \left[\nabla\frac{1}{n}, \nabla p_e\right]_z, \quad (6)$$

в котором правая часть описывает генерацию магнитного поля.

Система (1) – (6) сохраняет полную энергию и энтропию плазмы. Она позволяет детально исследовать, в каких условиях и как быстро развиваются дрейфовые потоки, приводящие к выбросу тепла к стенкам.

Складывая (2) и (3), найдем с учетом (4)

$$\mathrm{div}\,\mathrm{v} = \frac{1}{p}\left\{\left[\nabla\frac{p_i}{b}, \nabla\frac{p_i}{n}\right]_z - \left[\nabla\frac{p_e}{b}, \nabla\frac{p_e}{n}\right]_z\right\}. \quad (7)$$

Подставляя это выражение для div v в (1), (6) и в уравнение для $q = p_e - p_i$, полученное вычитанием (3) из (2), получим

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{dt} + \mathrm{v}\,\nabla n = \frac{1}{2b^2}[\nabla q, \nabla b]_z + \frac{q}{nb^2}[\nabla b, \nabla n]_z + \frac{1}{2bn}[\nabla n, \nabla q]_z, \quad (8)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathrm{v}\nabla q = -\frac{5}{6}\,\frac{p^2-q^2}{b^2n^2}[\nabla b,\nabla n], \tag{9}$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \mathrm{v}\nabla b = \frac{q}{bn^2}[\nabla b,\nabla n] + \frac{1}{2nb}[\nabla q,\nabla b]. \tag{10}$$

Благодаря специфике правых частей уравнения (8) – (10) система (5), (7), (8) – (10) может быть упрощена переходом от эйлеровых координат x, y к лагранжевым x_0, y_0. При этом $\left.\frac{d}{dt}\right|_{\text{эйлер}} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\text{лагранж}}$

$$[\nabla u,\nabla v]_{\text{эйлер}} \equiv \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{D(u,v)}{D(x_0,y_0)}\,\frac{D(x_0 y_0)}{D(x,y)} = \frac{n}{n_0}\,\frac{D(u,v)}{D(x_0,y_0)} = \frac{n}{n_0}[\nabla u,\nabla v]_{\text{лагранж}}$$

для любых функций u и v. Здесь $D(u,v)/D(x,y)$ – якобиан преобразования $(x,y)\ (u,v)$, $n = n(x_0, y_0, t)$ – текущая и $n_0 = n(x_0, y_0, 0)$ начальная плотность в данной лагранжевой точке. Уравнения (8) – (10) принимают в лагранжевых координатах вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n}{n_0}\left\{\frac{1}{2b^2}[\nabla q,\nabla b]_z + \frac{q}{nb^2}[\nabla b,\nabla n]_z + \frac{1}{2nb}[\nabla n,\nabla q]_z\right\}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{n}{n_0}\left\{-\frac{5}{6}\,\frac{p^2-q^2}{b^2n^2}[\nabla b,\nabla n]_z\right\}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{n}{n_0}\left\{\frac{q}{bn^2}[\nabla b,\nabla n]_z + \frac{1}{2nb}[\nabla q,\nabla b]_z\right\}. \tag{13}$$

Система (11) – (13) автономна; решив ее, найдем зависимость n, q, b от x_0, y_0 t, а затем, используя (5) и (7), можно вернуться к эйлеровым координатам. Однако многие свойства дрейфовой турбулентности можно изучать на основе уравнений (11) – (13), записанных на лагранжевой карте. Так, уравнение (13) может быть записано в виде $\partial b/\partial t + \mathrm{w}\nabla b = 0$, откуда следует важный вывод, что B_{min} и B_{max} не меняются, размагничивания в θ-пинче произойти не может. Далее, любые состояния, в которых линии уровня n, q, b совпадают (в частности аксиально-симметричные состояния) являются стационарными для уравнений (11) – (13). При исследовании устойчивости этих состояний в уравнения для возмущений $\tilde{n}$, $\tilde{q}$, $\tilde{b}$ входят производные от $\tilde{n}$, $\tilde{q}$, $\tilde{b}$ вдоль линий уровня стационарного состояния. Отсюда следует, что собственные функции локализованы на этих линиях уровня, а критерий устойчивости может быть записан через локальные значения величин n, q, b и их производные.

Аналог системы (11) – (13) можно получить и при произвольных β. Мы приведем критерий устойчивости и инкремент для общего случая

$$\Gamma = \frac{c\,(T_e + T_i)\,\gamma^{1/2}}{2\,eB\,(\gamma + 2\beta^{-1})}\,\sqrt{-\;Xk} \tag{14}$$

$$X > 0 \text{ для устойчивости,} \tag{15}$$

где k – волновой вектор возмущения,

$$X = \vec{\kappa}^2_B\,[\,(\gamma^2 - 4\beta^{-2}) + \theta^2(\gamma - 1)\,(\,4\beta^{-2} - \gamma)\,] + \vec{\kappa}^2_{(T_e - T_i)}[\,\gamma\theta^2] +$$

$$+ \vec{\kappa}_{(Te - Ti)}\vec{\kappa}_B\,[\,4\,(\gamma - 1)\,\theta^2\beta^{-1}] + \vec{\kappa}_n\vec{\kappa}_B[\,-2\gamma(\gamma + 2\beta^{-1}) + 2\,\theta^2(\,\gamma - 1)\,(\,\gamma + 2\beta^{-1})],$$

$$\vec{\kappa}_A \equiv \nabla\, ln A(A = B,\ n,\ T_e - T_i); \qquad \theta^2 = \left(\frac{T_e - T_i}{T_e + T_i}\right)^2; \quad \gamma = 5/3\,. \tag{16}$$

Из (16) видно, что при сравнимых T_e и T_i членами, содержащими θ^2, можно пренебречь ($\theta^2 < 1/9$ при $0{,}5 < T_e\,/\,T_i < 2$), и критерий устойчивости упрощается

$$\vec{\kappa}^2_B\,(\gamma - 2\beta^{-1}) - 2\gamma\vec{\kappa}_n\vec{\kappa}_B > 0 \text{ для устойчивости.} \tag{17}$$

Из (17) следует, что состояния, полученные быстрым нагревом (электронным пучком, лайнером, лазером) однородной плазмы в однородном магнитном поле, имеющие вследствие вмороженности поля $\vec{\kappa}_n \approx \vec{\kappa}_B$, неустойчивы.

Для иллюстрации нелинейного режима рассмотрим случай сильного отрыва температур $q^2(x_o,\ y_o,\ t = 0) = p^2$. Из (12) следует, что это равенство сохраняется при всех временах, а из (11) и (13) – что $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{b}\right) = 0$, т. е. $\frac{n}{b} = f(x_o,\ y_o)$. Подставляя это равенство в (11) получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{q}{n_o(x_o, y_o)}\,\frac{1}{n}\left[\nabla f, \nabla\,\frac{1}{n}\right] = 0.$$

Оно аналогично уравнению $\dot{v} + vv' = 0$; за конечное время происходит "опрокидывание" профиля n и b, и образуется скачок этих величин. Вблизи скачков важны диссипативные эффекты, которые определяют структуру скачка. Описание дрейфовых потоков на основе уравнений

(11) – (13), не содержащих малых параметров, нам представляется достаточно информативным и в то же время удобным для исследования численными методами.

Поступила в редакцию
17 апреля 1977 г.

Литература

[1] Л.А.Большов, Ю.А.Дрейзин, А.М.Дыхне. Письма в ЖЭТФ, 9, 288, 1974.

[2] Б.Б.Кадомцев. ЖЭТФ, 37, 1096, 1959.

[3] Л.В.Михайловская. ЖТФ, 37, 1974, 1967.

[4] С.И.Брагинский. Вопросы теории плазмы, т. 1, М, 1962.

[5] G.I.Budker. Proc. 6th Europ Conf. on Plasma Physics. and Contr. Fusion 2, 136, Moscow, 1973.

[6] Г.Е.Векштейн, Д.Д.Рютов, М.Д. Спектор, П.З.Чеботаев. ПМТФ, 6, 3, 1974.