Письма в ЖЭТФ, том 26, вып. 2, стр. 63 – 65 *20 июля 1977 г.*

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ С РАСХОДЯЩЕЙСЯ И С КОЛЛАПСИРУЮЩЕЙ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

О.И.Богоявленский

В общей теории относительности найдены автомодельные решения с расходящейся и с коллапсирующей сферическими ударными волнами в ультрарелятивистском газе.

Решения с ударными волнами в общей теории относительности естественно искать, по аналогии с классической газовой динамикой, в классе автомодельных сферически симметричных решений. Эти решения можно представить в конформно-статическом виде

$$ds^2 = \exp(2\tau)(\sigma\exp(\nu(r))d\tau^2 - \sigma\exp(\lambda(r))dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

где $\sigma = \pm 1$. Действительно, при отображении $R = \exp(\tau + \zeta)$, $t = \exp(\tau + \psi(\zeta))$, где $\zeta = \ln r$ и $d\psi/d\zeta = \exp(\lambda - \nu + 2\zeta)$ метрика (1) переходит в метрику автомодельного вида [1]:

$$ds^2 = \exp(\nu_0(t/R))dt^2 - \exp(\lambda_0(t/R))dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2)$$

В данной работе рассматриваются решения уравнений Эйнштейна вида (1) с гидродинамическим тензором энергии-импульса материи T_i^j с уравнением состояния $p = k\epsilon$, $0 < k < 1$. Плотность энергии ϵ и 4-скорость материи u имеют вид

$$\epsilon = \bar{\epsilon}(r)\exp(-2\tau),$$

$$(u^0, u^1, u^2, u^3) = \exp(-\tau)\left(\left(\frac{\sigma\exp(-\nu)}{1-u^2}\right)^{1/2}, \text{ и } \left(\frac{\sigma\exp(-\lambda)}{1-u^2}\right)^{1/2}, 0, 0\right),$$

где $u = v^\sigma$, $\sigma = \pm 1$, v – трехмерная радиальная скорость материи.

Система уравнений Эйнштейна

$$R^0_0 - R^1_1 = T^0_0 - T^1_1,\ R^2_2 - ½R = T^2_2, \quad T^k_{1;k} = 0 \tag{3}$$

после исключения ϵ из уравнения $R_{01} = T_{01}$ сводится к замкнутой системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений в переменной $\zeta = \ln r$ на функции $Q(\zeta) = \exp(\zeta + (\lambda - \nu)/2)$, $w(\zeta) = d\nu/d\zeta$, $u(\zeta)$. Уравнение $R^1_1 - ½R = T^1_1$ выполняется в силу системы (3).

Важной особенностью полученной системы является наличие поверхностей $V_\pm$: $u = \pm k^{1/2}$ непродолжимости решений, на которых производная $du/d\zeta$ меняет знак, проходя через бесконечность (всюду на $V_\pm$, кроме линии l, см. ниже). Такая непродолжимость решений означает, что в реальном решении задачи возникает ударная волна. Условия на разрыве [2] приводят к следующему правилу сшивки решений: на разрыве функции ν, λ, r, w, Q непрерывны, значения скорости u и плотности энергии ϵ с двух сторон разрыва (1 и 2) связаны соотношениями $u_1 u_2 = k$, $\epsilon_1/\epsilon_2 = (u_2^2 - k)/k(1 - u_2^2)$. Физический смысл имеют только те решения, в которых: а) ударная волна является волной сжатия, б) решение определено при всех $r > 0$.

Исследование системы уравнений (3) показывает, что условиям а) и б) удовлетворяют только траектории следующих трех типов. I. Сепаратрисы, выходящие из неустойчивой особой точки $Z_1(q = Q/u = -3(1+k)/(1+3k),\ u = w = 0)$. II. Сепаратрисы, выходящие (при возрастании ζ) из отрезка l_1 неустойчивых особых точек на линии l: $u = -k^{1/2}$, $w(1-k) + 8Qk^{3/2}(1+k)^{-1} = 4k$ на поверхности V_-. III. Сепаратрисы, входящие в отрезок l_1 и в отрезок l_2 притягивающих (при $|u| < k^{1/2}$) особых точек на линии l. Перечислим свойства соответствующих решений.

I. Сепаратрисам особой точки Z_1 соответствуют решения с расходящейся ударной волной. В системе отсчета (2) эти решения продолжаются до центра симметрии $R = 0$. После прохождения ударной волны метрика в центре не имеет особенности, скорость газа v и плотность энергии ϵ при $R/t \ll 1$ имеют асимптотики $v \approx (2/3(1+k))R/t$, $\epsilon \approx c/t^2$. Имеются решения, в которых после прохождения ударной волны координата R вдоль траекторий движения газа имеет любое конечное число колебаний. В области перед ударной волной решения продолжаются в статической системе отсчета при $t_1 \geqslant 0$. Радиус ударной волны $R_0 = C_0 t_1$, $C_0 > 0$. Образование ударной волны (взрыв) происходит в центре симметрии $R_1 = 0$ при $t_1 = 0$. В этот момент скорость газа направлена к центру, плотность энергии $\epsilon = C_1/R_1^2$, на бесконечности метрика плоская, в центре симметрии метрика имеет коническую особенность.

II. Сепаратрисам, выходящим из отрезка l_1 и гладко продолжающимся через поверхность V_-, также соответствуют решения с расходящейся ударной волной. Однако поведение этих решений в области за ударной волной существенно отличается от решений типа I. В частности, в решениях типа II пространственноподобные сечения при $t \neq 0$ топологически являются произведением двумерной сферы на прямую (как и в известном решении Крускала), и имеют "горловину", которая сжата в точку в момент выхода ударной волны из центра $R = t = 0$.

III. Сепаратрисам, входящим в отрезок $I_1 + I_2$ и гладко продолжающимся через поверхность V_-, соответствуют решения с коллапсирующей ударной волной. В координатах (2) радиус ударной волны $R_0 = -C_0 t$ $(t < 0,\ C_0 > 0)$. Пространственноподобные сечения при $t \neq 0$ топологически являются произведением двумерной сферы на прямую и имеют "горловину", которая сжимается в точку при коллапсе ударной волны в центр $R = t = 0$.

Приведенное краткое описание найденных решений свидетельствует как о том, что эти решения имеют ряд общих свойств с известными решениями задачи о взрыве [3] и задачи о сходящейся ударной волне [4–6] в классической газовой динамике, так и о том, что в общей теории относительности у решений этих задач появляются существенные новые свойства.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 мая 1977 г.

Литература

[1] К.П.Станюкович. ЖЭТФ, 66, 826, 1974.

[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.

[3] Л.И.Седов. Методы подобия и размерности в механике. М., изд. Наука, 1973.

[4] К.П.Станюкович. Неустановившиеся движения сплошной среды, Гостехиздат, 1955.

[5] G. Guderley. Luftfahrtforschung. 19, 302, 1942.

[6] Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Гостехиздат, 1963.