*Письма в ЖЭТФ, том 26, вып. 2, стр. 99 – 102* *20 июля 1977 г.*

# О НОВЫХ ТИПАХ АДДИТИВНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

*Л.Э.Генденштейн*

Показано, что для задания нетривиальных граничных условий, приводящих к появлению топологических законов сохранения для многомерных солитонов, не обязательно, чтобы множество полей, минимизирующих гамильтониан, было компактным; может оказаться достаточным, чтобы оно содержало компактные пересекающиеся подмножества. Приведен пример такой модели, являющийся некоторым обобщением модели синус-Гордона на многомерный случай. При этом появляются новые аддитивные топологические законы сохранения.

Как известно, в теориях поля с вырожденным вакуумом могут возникать солитонные решения [1 – 4]. Интересной особенностью таких решений являются своеобразные законы сохранения, названные топологическими [2, 3]. Эти законы сохранения связаны с наличием нетривиальных граничных условий для решений, обладающих конечной энергией. Обозначим $\Phi$ – множество значений полей, отвечающих минимальному значению потенциальной энергии, а $R$ – множество, соответствующее границе $r \to \infty$ (две точки в одномерном случае, окружность в двумерном, сфера – в трехмерном). Для того, чтобы решение обладало конечной энергией, необходимо, чтобы на бесконечности поля $\phi \in \Phi$. Таким образом, речь идет об отображениях $R \to \Phi$. Конфигурации поля, топологически неэквивалентные (принадлежащие к различным гомотопическим классам), не могут переходить друг в друга из-за бесконечного потенциального барьера, и поэтому топологические характеристики отображения $R \to \Phi$ являются сохраняющимися величинами.

Нас будут интересовать законы сохранения типа законов сохранения *числа* солитонов. Такие законы сохранения приобретают особый интерес, если считать, что солитонные решения могут соответствовать частицам [1, 2, 5], а законы сохранения таких частиц рассматривать как топологические [2].

Очевидно, в интересующих нас моделях, во-первых, должны содержаться $n$-солитонные решения для произвольных целых $n$ (положительных и отрицательных), и, во-вторых, топологическая характеристика, соответствующая числу частиц (солитонов) должна быть аддитивной.

Первое означает, что число гомотопических классов должно быть бесконечным, второе – что соответствующая группа гомотопии должна быть абелевой.

Например, одномерная модель Хиггса не является таковой из-за ограниченного числа возможных типов задания граничных условий. Как известно, в этой модели сохраняющейся величиной является лишь четность числа солитонов ("кинков").

Моделями, удовлетворяющими нашим требованиям, являются, например, одномерная модель синус-Гордона или многомерные солитоны То-офта – Полякова [1, 2].

Для наших целей важно отметить, что бесконечное число гомотопических классов отображения $R \to \Phi$ реализуется в одномерных ($D = 1$) и многомерных ($D > 1$) моделях совершенно различным образом.

В одномерных моделях оно обусловлено бесконечным числом дискретных минимумов $U(\phi)$, и сохраняющейся величиной является $\phi(\infty) - \phi(-\infty)$. В многомерных моделях сохраняющейся аддитивной величиной является *степень отображения* $R \to \Phi$ [2 – 4].

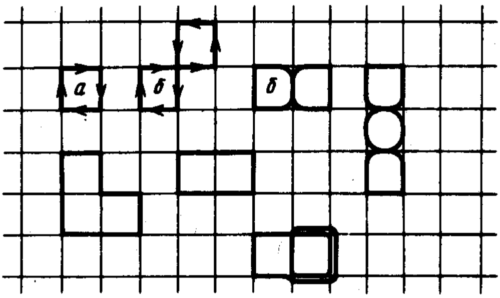


Рис. 1

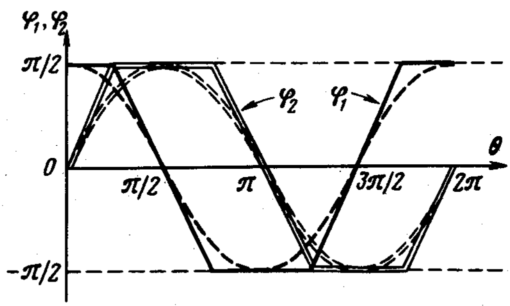


Рис. 2.

Однако, для многомерных моделей (в отличие от одномерных) принято считать, что граница $R$ должна при этом отображаться на *все* множество $\Phi$, а в таком случае нетривиальные отображения существуют только тогда, когда $\Phi$ – компактное множество. На наш взгляд, такое ограничение является излишним, и приводит к тому, что из вида упускается целый ряд моделей, обладающих новыми интересными свойствами. Мы рассмотрим сначала конкретный пример одной из таких моделей, а затем отметим возможные обобщения.

Пусть плотность потенциальной энергии в лагранжиане имеет вид

$$U(\phi) = \beta \prod_{i=1}^{D} \cos^2\phi_i \tag{1}$$

(мы не включаем члены с пространственными производными полей). Эту модель можно рассматривать, в некотором смысле, как многомерное обобщение модели синус-Гордона, однако отметим, что в нашем случае *число полей равно размерности пространства* $D$. $U(\phi)$ минимально при $\phi_i = (k + {}^1/_2)\pi$, где $k$ – целые. Ограничимся пока для определенности $D = 2$. В этом случае для $U(\phi)$ можно представлять себе "стеганую" поверхность, т. е. $\Phi$ – множество точек на решетке в пространстве полей и некомпактно. Какие отображения $R \to \Phi$ задают в этом случае нетривиальные граничные условия? Простейшее из них отмечено на рис. 1 буквой $a$ и соответствует отображению $R$ на границу одной из ячеек в пространстве полей. Соответствующее стационарное решение качественно напоминает решение для потенциала Хиггса. Действительно, для малых $\phi$ уровни $U(\phi) = \mathrm{const}$ близки к окружностям (сферам при $D = 3$), и поэтому решение уравнений Эйлера

$$\Delta\phi_i = -2\beta \operatorname{tg} \phi_i\, U(\phi) \approx -2\beta\phi_i\, U(0) \qquad (2)$$

при определенных выше граничных условиях будет типа "ежа" [2]. Более того, похожее поведение будет иметь место и на бесконечности: на рис. 2 приведена зависимость $\phi_{1,2}$ от пространственного угла $\theta$ при $r \to \infty$ для двумерного случая (в модели Хиггса это были бы синусоиды, тоже сдвинутые на $\pi/2$, они показаны пунктиром). При любом $\theta$ на асимптотике хотя бы одно $\phi = (k + {}^1/_2)\pi$, т. е., $U(\infty) = 0$, что необходимо для локализованного решения. Кроме того, так же, как и для потенциала Хиггса, можно задать произвольную степень отображения на поверхность (границу) ячейки, определив тем самым граничные условия для многосолитонных (вообще говоря, нестационарных) решений.

Но в рассматриваемой модели имеются и другие, новые типы нетривиальных граничных условий. Например, на рис. 1,*б* приведено отображение $R$ на "восьмерку", соответствующее одному солитону и одному "антисолитону", которые, однако, *не могут аннигилировать,* поскольку восьмерку нельзя стянуть в точку, сохраняя требование $U(\infty) = 0$ в каждый момент. Рассматривая другие типы отображений на рис. 1, можно увидеть, что новые гомотопические классы появились потому, что, хотя $\Phi$ само и не компактно, но оно *содержит компактные пересекающиеся подмножества.* Опишем новые типы отображений в общем случае, когда $\Phi$ имеет такие подмножества.

Разобьем $R$ на связные подмножества $R_i$ и обозначим $R_{ik}$ пересечение $R_i$ и $R_k$ ($R_{ik} = R_i \cap R_k$). Выберем, далее, пересекающиеся компактные подмножества $\Phi^\alpha$ из всего $\Phi$, и обозначим $\Phi^{\alpha\beta} = \Phi^\alpha \cap \Phi^\beta$. Искомое отображение $R \to \Phi$ зададим как совокупность непрерывных отображений

$$R_i \to \Phi^\alpha\,; \qquad R_k \to \Phi^\beta \qquad (3)$$

при условии $R_{ik} \to \Phi^{\alpha\beta}$. Теперь для каждого из отображений (3) может быть *своя* степень отображения $n_i^\alpha$, и, таким образом, вместо одной аддитивной сохраняющейся величины $n$ ( в модели типа Хиггса) мы имеем (вообще говоря, бесконечный) набор таких величин $\{n_i^\alpha\}$ [1]. При

[1] Разные наборы $\{n_i^\alpha\}$ еще не всегда определяют физически различные решения. Например, для модели с потенциалом (1) все конфигурации $\{\Phi^\alpha\}$, которые могут быть получены друг для друга трансляцией или поворотом (в пространстве полей), приводят к физически эквивалентным решениям.

этом, если $\Phi^a$ различны, то в рамках одной модели могут существовать солитоны с различными массами и другими характеристиками.

В заключение отметим, что, рассматривая нетривиальные граничные условия, мы не касались других условий, необходимых для существования локализованных несингулярных решений (например, устойчивости по отношению к масштабным преобразованиям $\phi(x) \to \phi(\lambda x)$. Как правило, эти вопросы не имеют отношения к топологической классификации решений, и различные подходы к их решению описаны, например, в [3].

Автор благодарен Д.В.Волкову, И.В.Криве и Е.М.Чудновскому за обсуждения и интересные замечания.

Харьковский
физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
31 мая 1977 г.

## Литература

[1] G. 't Hooft. Nucl. Phys., B79, 276, 1974.

[2] А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 20, 430, 1974; ЖЭТФ, 68, 1975, 1975.

[3] Л.Д.Фаддеев. Кн. Материалы IV Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта, 1976 изд. ОИЯИ, стр. 207.

[4] J.Arafune et al. Jorn. of Math. Phys., 16, 433, 1975.

[5] И.С.Шапиро. Письма в ЖЭТФ, 21, 624, 1975; ЖЭТФ, 70, 2050, 1975.